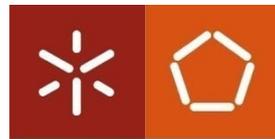


Francisco José Gonçalves Lemos

Laboratório Virtual –
Simulação de Problemas de Controlo



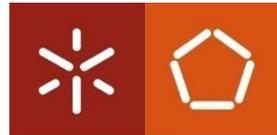
Universidade do Minho

Universidade do Minho
Novembro de 2008

Laboratório Virtual – Simulação de Problemas de Controlo

Francisco José Gonçalves Lemos

Tese submetida na Universidade do Minho
para a obtenção do grau de
Mestre em
Engenharia Electrónica Industrial e Computadores



Universidade do Minho

Universidade do Minho

Novembro de 2008

Trabalho efectuado sobe a orientação das professoras

Filomena Maria da Rocha Menezes de Oliveira Soares

E

Celina Maria Godinho Silva Pinto Leão

Aos meus Pais, Teresa e
Fernando,
e a minha irmã
Ana Maria

Agradecimentos

As professoras Filomena Soares e Celina Pinta Leão, minhas orientadoras nesta dissertação, pela orientação, incentivo, compressão, apoio e exigência demonstrada ao longo destes meses de trabalho.

Aos meus amigos e colegas de laboratório pela força e apoio dado.

Aos meus amigos e colegas de curso pelo apoio e força prestado ao longo de todo o trabalho.

Aos outros meus amigos pelo apoio e compreensão.

Aos meus pais Fernando e Teresa, pelo apoio, compreensão, incentivo, esforço e amor demonstrado ao longo de toda a minha vida, para que conseguisse chegar até este ponto.

À minha irmã Ana Maria, pela força, incentivo e compreensão dados.

E a todos os familiares e amigos que sempre me apoiaram mas que não são aqui referidos.

A todos o meu muito Obrigado!

Resumo

Com a crescente utilização da Internet e a chegada do processo de Bolonha, torna-se essencial o desenvolvimento de ferramentas que estejam disponíveis na rede global, que permitam ao aluno não só aprender como também aplicar os seus conhecimentos fora das salas de aula.

Assim, esta dissertação tem como objectivos desenvolver e implementar um laboratório virtual de resolução de problemas de controlo (SimLab). Este laboratório está disponível na internet e servirá de apoio às unidades curriculares que envolvem Métodos Numéricos e Controlo, ambas leccionadas na Universidade do Minho.

O laboratório virtual é constituído por um conjunto de programas desenvolvidos em Java, tendo como suporte uma página Web (www.dei.uminho.pt/LabSim).

O laboratório virtual permite simular sistemas eléctricos, mecânicos, hidráulicos e térmicos. O sistema de controlo funciona tanto em malha aberta como em malha fechada, implementando diferentes tipos de controlador: On-Off ou PID, nas suas quatro variantes (velocidade, posição e respectivas modificações). Estão disponíveis vários métodos numéricos para a resolução das equações diferenciais do modelo matemático do caso em estudo.

Ao longo do documento são apresentados os conceitos teóricos associados aos algoritmos dos Métodos Numéricos para resolução de equações diferenciais ordinárias bem como a descrição dos algoritmos de controlo.

É, também, apresentada a modelização para cada problema a implementar, de maneira a obter as equações diferenciais que descrevem cada problema.

São apresentados os resultados para duas simulações, um sistema de primeira ordem e um de segunda ordem, de forma a testar e validar todas as funcionalidades e os algoritmos implementados nas simulações do laboratório virtual. Os resultados obtidos correspondem às respostas dos sistemas de controlo quando sujeitos a diferentes situações possíveis: diferentes métodos numéricos, diferentes algoritmos de controlo e diferentes parâmetros que definem o sistema (variáveis de entrada).

O SimLab é uma ferramenta multidisciplinar.

Palavras-chave: Métodos numéricos, controlo de processos, controlador On-Off, controlador PID

Abstract

With the increasing use of the Internet and with Bologna declaration, the development of new tools available in the Web becomes essential to students to learn and apply their knowledge out of the classrooms.

Thus, this work has as objectives to develop and to implement a virtual laboratory of control problems (SimLab). SimLab is available in the Internet, serving Numerical Methods and Control disciplines, both lectured in the University of the Minho.

The virtual laboratory is constituted by a set of programs developed in Java, supported in a Web page (www.dei.uminho.pt/LabSim).

The virtual laboratory allows simulating control systems in open loop and in closed loop, with different types of controller: On-Off or PID (Proportional, Integral and derivative). The four discrete PID algorithms (velocity, position and respective modifications) are considered. Also, SimLab allows testing different numerical methods in the resolution of ordinary differential equations that describe the control systems under study (hydraulic, mechanical, electrical or thermal type systems).

The theoretical aspects related to control theory as well as concerned to numerical integration are listed and explained in detail.

The results for two simulations, a first-class system and a second order system are presented, to test and validate all the functionalities and algorithms implemented in the simulations of the virtual laboratory. The results correspond to the control systems when subject to different possible situations: different numerical methods, different control algorithms and different parameters that define the system (input variables).

The virtual laboratory is considered a multidisciplinary tool.

Keywords: Numerical methods, control of processes, On-Off controller, PID controller.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
Lista de símbolos e abreviaturas	xv
CAPÍTULO 1 Introdução	1
1.1. Enquadramento	1
1.2. Estado da arte	2
1.3. Objectivos	5
1.4. O que distingue este simulador dos que já existem	6
1.5. Sistemas a modelizar no laboratório virtual	6
1.6. Linguagem de programação utilizada	7
1.7. Métodos numéricos utilizados	7
1.8. Organização da Tese	7
CAPÍTULO 2 Fundamentação Teórica	9
2.1. Métodos numéricos	9
2.1.1. Equações diferenciais ordinárias	9
2.1.2. Problemas com condições iniciais	10
2.1.3. Sistemas de equações diferenciais	19
2.1.4. Equações diferenciais de ordem igual ou superior a dois	22
2.2. Controlo	23
2.2.1. Controlo em Malha aberta	23
2.2.2. Realimentação negativa	24
2.2.3. Controlo em Malha fechada	25
2.2.4. Controladores Analógicos	25
2.2.5. Controlador On-Off	25
2.2.6. Controlador PID Analógico	27
2.2.7. Controladores Digitais	31
2.2.8. Controlador PID Digital	34
2.2.9. Sintonização de Controladores	36
2.3. Sistemas	39
2.3.1. Modelização de um sistema	39
2.3.2. Modelização em espaço de estados	40
2.4. Java	42
2.4.1. Java Applets	42
CAPÍTULO 3 Trabalho Realizado	45
3.1. Modelização de sistemas	45
3.1.1. Modelização de sistemas eléctricos	45
3.1.2. Modelização de sistemas hidráulicos	50
3.1.3. Modelização de sistemas térmicos	57
3.1.4. Modelização de sistemas mecânicos	61
3.2. Métodos Numéricos - Algoritmos	76
3.2.1. Algoritmo de Runge-Kutta	76
3.2.2. Métodos preditores-correctores de Euler e Adams	77
3.2.3. Sistemas de equações diferenciais	79
3.3. Algoritmos de controlo	80
3.3.1. Malha aberta	80
3.3.2. Controlador On-Off	81
3.3.3. Controlador PID	82
3.4. Programação	84
3.4.1. Interface do programa	84
3.4.2. A página Web desenvolvida	87

CAPÍTULO 4 Resultados	91
4.1. Resultados para um sistema de primeira ordem	91
4.1.1. Simulação em malha aberta	91
4.1.2. Simulação em malha fechada com controlador On-Off.....	96
4.1.3. Simulação em malha fechada com controlador PID	97
4.2. Resultados para um sistema de segunda ordem	106
4.2.1. Simulação em malha aberta	107
4.2.2. Simulação em malha fechada com controlador On-Off.....	108
4.2.3. Simulação em malha fechada com controlador PID	110
CAPÍTULO 5 Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros	119
5.1. Conclusões	119
5.2. Sugestões para trabalho futuro	122
REFERÊNCIAS	123
Anexo A. SimLab	127

Lista de Figuras

Figura 2-1 - Sistema em malha aberta.....	24
Figura 2-2 - Controlo com realimentação negativa.....	24
Figura 2-3 - Sistema em malha fechada.....	25
Figura 2-4 - Esquema de um sistema com controlador On-Off.....	26
Figura 2-5 - Margem de histerese de um controlador On-Off.....	26
Figura 2-6 - Comportamento de um sistema com controlador On-Off.....	27
Figura 2-7 - Esquema básico de um sistema com controlador PID.....	27
Figura 2-8 - Resposta de um controlador PID para diferentes parâmetros do controlador (entrada em degrau com sistema em malha fechada).....	31
Figura 2-9 - Resposta ideal de um controlador PID.....	31
Figura 2-10 - Diagrama de blocos de um sistema de controlo digital.....	32
Figura 2-11 - Acção de um retentor de orem zero.....	34
Figura 2-12 - Curva em s.....	37
Figura 2-13 - oscilação constante com período P_u	38
Figura 3-1 – Circuito RL.....	46
Figura 3-2 – Circuito RLC.....	47
Figura 3-3 – Circuito RLC serie.....	47
Figura 3-4 - Circuito RRLC.....	48
Figura 3-5 - Sistema Hidráulico.....	50
Figura 3-6 - Sistema hidráulico de 1ª ordem.....	51
Figura 3-7 - Sistema hidráulico de 2ª ordem.....	52
Figura 3-8 - Sistema hidráulico de 2ª ordem.....	54
Figura 3-9 - Sistema hidráulico de 3ª ordem.....	55
Figura 3-10 – Sistema térmico de 1ª ordem.....	58
Figura 3-11 - Sistema térmico de 1ª ordem.....	59
Figura 3-12 - Sistema térmico de 2ª ordem.....	60
Figura 3-13 - Movimento rectilíneo.....	63
Figura 3-14 - Movimento rectilíneo com atrito.....	64
Figura 3-15 - Força elástica, uma mola.....	66
Figura 3-16 - Força elástica duas molas.....	67
Figura 3-17 - Plano inclinado.....	68
Figura 3-18 - Pêndulo.....	70
Figura 3-19 - Pára-quedista.....	71
Figura 3-20 - Suspensão automóvel.....	73
Figura 3-21 - Pêndulo invertido.....	74
Figura 3-22 - Interface dos programas em JAVA.....	85
Figura 3-23 - Exemplo de um dos programas a funcionar.....	87
Figura 3-24 - Esquema da página web.....	88

Figura 3-25 - Página inicial Home.....	89
Figura 3-26 - Pagina dedicada aos Métodos Numéricos.....	89
Figura 3-27 - Página dedicada ao Controlo	89
Figura 3-28 – Página Sistemas/Simulador.....	90
Figura 4-1 - Simulação em malha aberta com ordem=1	92
Figura 4-2 - Simulação em malha aberta com ordem=2.....	92
Figura 4-3 - Simulação em malha aberta com ordem=3.....	93
Figura 4-4 - Simulação em malha aberta com ordem=4.....	93
Figura 4-5 - Sistema em malha aberta, método Preditor-corrector de Adams de 2ª ordem.....	94
Figura 4-6 - Sistema em malha aberta, método Preditor-corrector de Adams de 4ª ordem.....	94
Figura 4-7 - Simulação malha aberta, com hin diferente de 0, utilizando os métodos de Runge-Kutta (esquerda) e preditor-corrector (direita).	95
Figura 4-8 - Simulação em malha aberta com h=0.1	95
Figura 4-9 - Simulação em malha fechada, com controlador On-Off e método de Runge-Kutta.....	97
Figura 4-10 - Simulação em malha fechada com controlador On-Off e método preditor-corrector de Adams.....	97
Figura 4-11 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade	98
Figura 4-12 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade e steptime=0.5s	99
Figura 4-13 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade com Kp=0.15	99
Figura 4-14 - Simulação em malha fechada controlador PID de velocidade.....	100
Figura 4-15 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade modificado.....	101
Figura 4-16 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade modificado com Kp=0.15.	101
Figura 4-17 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade modificado.....	102
Figura 4-18 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e cest=0	103
Figura 4-19 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e cest=3	103
Figura 4-20 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e cest=0.....	104
Figura 4-21 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e cest=3	104
Figura 4-22 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e cest=0.....	105
Figura 4-23 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e cest=3.....	105
Figura 4-24 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e cest=0.....	106
Figura 4-25 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e cest=3	106
Figura 4-26 - Sistema hidráulico de segunda ordem.	107
Figura 4-27 - Simulação em malha aberta sistema hidráulico de segunda ordem.	108
Figura 4-28 – Simulação em malha fechada com controlador On-Off de um sistema hidráulico de segunda ordem controlando $h1$	109
Figura 4-29 - Simulação em malha fechada com controlador On-Off de um sistema hidráulico de segunda ordem controlando $h2$	110
Figura 4-30 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h1$ usando o algoritmo de velocidade.....	111
Figura 4-31 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h1$ usando o algoritmo de velocidade modificado.....	112

Figura 4-32 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h1$ usando o algoritmo de posição..... 113

Figura 4-33 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h1$ usando o algoritmo de posição modificado..... 114

Figura 4-34 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h2$ usando o algoritmo de velocidade..... 115

Figura 4-35 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h2$ usando o algoritmo de velocidade modificado..... 116

Figura 4-36 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h2$ usando o algoritmo de posição..... 117

Figura 4-37 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h2$ usando o algoritmo de posição modificado..... 118

Lista de Tabelas

Tabela 1-1 - Resultados da pesquisa de "sites" com laboratórios virtuais	3
Tabela 2-1 - Influencia das várias acções do controlador PID.....	30
Tabela 2-2 - Tabela para cálculo dos parâmetros do controlador PID pelo método de Ziegler-Nichols em malha aberta.....	38
Tabela 2-3 - Tabela para cálculo dos parâmetros do controlador PID pelo método de Ziegler-Nichols em malha fechada.....	38
Tabela 2-4 - Elementos armazenadores de energia.....	41
Tabela 3-1 - Elementos de um circuito eléctrico	45
Tabela 3-2- variáveis do sistema eléctrico.....	46
Tabela 3-3 - variáveis do sistema hidráulico	51
Tabela 3-4 - Elementos de um sistema térmico	57
Tabela 3-5 - Variáveis do sistema térmico	58
Tabela 3-6 - Elementos de um sistema mecânico de translação	62
Tabela 3-7 - Variáveis do sistema mecânico de translação	62
Tabela 3-8 - Elementos de um sistema mecânico de rotação	63
Tabela 3-9 - Variáveis do sistema mecânico de rotação.....	63

Lista de símbolos e abreviaturas

A – Amplitude
 C - acção de controlo.
 C_{est} – acção de controlo em estado estacionário
 E – erro
 F – força ou caudal.
 g – aceleração gravítica
 h – altura ou diferença entre os instantes de cálculo dos métodos numéricos.
 i – índice ou corrente eléctrica
 j – índice
 k – índice
 K_p – Ganho proporcional do controlador
 M – massa
 n – número de elementos
 P – Controlo Proporcional ou peso, força gravítica
 PD – Controlo Proporcional derivativo
 PI – Controlo proporcional e integral
 PID – Controlo proporcional integral e derivativo.
 sup – limite superior
 T - período de amostragem
 tol – tolerância
 u – sinal de controlo.
 v – Tensão, velocidade ou variável de saída
 x – variável x
 y - variável de saída
 α – ângulo
 θ – ângulo
 τ_i – constante de tempo integral
 τ_d – constante de tempo derivativo
 ω – velocidade angular

CAPÍTULO 1 Introdução

Neste capítulo são apresentados para além do enquadramento do trabalho desenvolvido, os seus objectivos e o estado da arte em simuladores de sistemas de controlo. São também apresentados os tipos de sistemas a simular, a linguagem de programação utilizada, e os métodos numéricos usados.

1.1. Enquadramento

O desenvolvimento das novas tecnologias pode ser utilizado como um objectivo estratégico no desenvolvimento de novas metodologias de ensino, modificando as atitudes passivas no modo de transmissão de conhecimento. O professor deve ser o catalisador do processo de aquisição de conhecimentos e não um membro passivo que se limita a enumerar teorias e conceitos. Por outro lado, o aluno passa a ser o principal actor no seu processo de aprendizagem.

Uma das novidades que veio com a implementação do processo de Bolonha [18], consiste em fazer com que o aluno aprenda por si próprio. Desta maneira é importante fornecer ao aluno ferramentas e meios para que possa atingir os objectivos que lhe são propostos.

Com o aumento do uso da Internet como veículo de transmissão de conhecimento, torna-se cada vez mais exigente a definição dos conteúdos a tornar públicos. A disponibilidade do sistema sem fios no *campus* universitário pode ajudar/facilitar esse aumento, não só a nível de graduação como também de pós graduação. Seguindo esta tendência, para uma mais rigorosa distribuição e disponibilização de informação, para um maior incentivo e para suporte em áreas de estudo com alto índice de insucesso, se define a motivação deste trabalho de dissertação.

Este projecto está inserido num projecto de investigação desenvolvido em conjunto pelos Departamentos de Electrónica Industrial (DEI) e de Produção e Sistemas (DPS) da Universidade do Minho (UM).

1.2. Estado da arte

Com este projecto, pretende-se dar continuidade a um processo de incentivo nas áreas de Controlo e de Métodos Numéricos, iniciado aos cursos de engenharia da Universidade do Minho em 2004. Alguns dos estudos desenvolvidos foram já publicados ilustrando a importância do uso de ferramentas numéricas no desenvolvimento e resolução de específicos problemas em engenharia. [1-3]. Os primeiros passos no uso das ferramentas Web como apoio ao ensino de engenharia estão dados sendo a adesão por parte dos alunos motivadora [1, 4].

Na actualidade existem vários “sites” dedicados ao ensino de controlo, através de simulações de problemas reais de controlo processos. Algumas destas simulações são até acompanhadas por fundamentação teórica tornando-se verdadeiros cursos on-line.

Foi feita uma pesquisa de “sites”, disponíveis na Internet, com simulações de vários sistemas, desde a electrónica até à mecânica. É importante referir que a linguagem de programação mais utilizada para gerar estas simulações presentes nos “sites” encontrados é o Java.

A tabela 1-1 mostra os motores de busca e palavras-chave usadas e o número de resultados obtidos.

Como se pode ver pela tabela 1-1, obtiveram-se mais resultados efectuando a pesquisa com as palavras Virtual control laboratory. Na pesquisa com palavras em português, usando as palavras laboratório virtual de controlo obtiveram-se menos resultados que usado as palavras laboratório virtual, isto deve-se ao facto de existirem vários laboratórios virtuais disponíveis na internet mas só uma parte desses laboratórios é que são dedicados ao controlo.

Tabela 1-1 - Resultados da pesquisa de "sites" com laboratórios virtuais

Motores de Busca	Palavras-chave	Nº resultados encontrados
Google	Laboratório Virtual	609.000
	Laboratório virtual de controlo	332.000
	Virtual control laboratory	576.000
YAHOO	Laboratório Virtual	1.270.000
	Laboratório virtual de controlo	32.800
	Virtual control laboratory	12.900.000
Live Search	Laboratório Virtual	1.050.000
	Laboratório virtual de controlo	9.030
	Virtual control laboratory	3.520.000

Devido ao elevado número de “sites” encontrados, só foram escolhidos alguns, os quais são apresentados a seguir:

- <http://www.williamson-labs.com/> [19]
Esta página tem várias simulações de sistemas eléctricos. As animações parecem ser feitas com *gifs* animados.
Para aceder as animações deve-se escolher a opção *animations* no menu do lado esquerdo da página. Depois é só escolher a animação pretendida.
Neste *site*, as animações não são acompanhadas por uma explicação.
- <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/VCLab/> [20]
Esta página apesar de ter várias simulações, só funciona em algumas versões do browser *netscape navigator*.
- <http://www.hhmi.org/biointeractive/vlabs/index.html> [21]
Nesta página pode-se encontrar simulações de sistemas biológicos. O modelo mais importante nesta página é, talvez, a simulação do batimento cardíaco.
- <http://www.fsc.ufsc.br/~ccf/parcerias/ntnujava/index-port.html#topo> [22]
Nesta página pode-se encontrar varias simulações de sistemas mecânicos, eléctricos, térmicos, entre outros.
As simulações são acompanhadas de uma explicação da simulação, de como usar a simulação, e de algumas situações que podem ser simuladas com aquele modelo.

Aqui, as animações estão programadas em Java.

- <http://br.geocities.com/saladefisica3/laboratorio.htm> [23]

Nesta página, encontram-se várias simulações de sistemas dos ramos da cinemática, dinâmica, electrónica, entre outros.

A linguagem de programação usada é Java.

Infelizmente este site está temporariamente indisponível.

- <http://www.labvirtual.pt.vu/> [24]

Nesta página, encontram-se também várias animações para simulações de sistemas eléctricos, de processamento de imagem e de áudio. Todas as simulações são efectuadas em Java *applets*.

Para aceder as simulações, basta seleccionar *applets* no menu do lado esquerdo da página.

Em algumas das opções existem ainda sub-opções, como por exemplo no caso dos circuitos eléctricos, onde se pode escolher o tipo de circuito a simular. Neste site também se pode aceder a um tutorial para cada simulação.

- http://wwwp.feb.unesp.br/jcandido/lav/lab_virtual/index.htm [25]

Nesta página encontram-se também várias simulações de sistemas físicos, principalmente de osciladores e ondas.

As animações das simulações são mais uma vez feitas em Java.

Infelizmente algumas das simulações não funcionam.

- <http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/index.html#> [26]

Nesta página encontram-se varias simulações de vários ramos da física. As simulações são iguais as encontradas em <http://www.fsc.ufsc.br/~ccf/parcerias/ntnujava/index-port.html#topo>. As simulações são acompanhadas por uma explicação daquilo que se esta a simular. As simulações também são em Java.

- http://www.wendelsantos.com/novo/principal.php?pag=laboratorio_simulacoes [27]

Nesta página encontra-se uma grande variedade de simulações de sistemas na área da física e matemática. Pode-se encontrar simulações que vão desde a electrónica (lei de ohm), até a óptica, passando pela mecânica, geometrias e ondas.

Neste site, as simulações também são acompanhadas de uma explicação.

A linguagem de programação usada é o Java.

- <http://csd.newcastle.edu.au/> [28]

Nesta página encontram-se algumas simulações principalmente de sistemas mecânicos e hidráulicos. Neste caso as simulações estão acompanhadas de uma explicação teórica do modelo com as equações.

A linguagem usada de programação usada é o Java.

- <http://www.lei.ucl.ac.be/multimedia/eLEE/PO/index.htm> [29]

Esta é uma página de e-learning dirigida principalmente aos estudantes de engenharia electrotécnica europeus. Aqui existe uma grande variedade de simulações relacionadas com as matérias abordadas no site, que se referem principalmente a sistemas de electrónica de potência. Aqui as simulações normalmente são acompanhadas de explicação teórica do que esta a acontecer.

- <http://controlo-processos.dei.uminho.pt/> [30]

Esta é a página da disciplina de controlo de processos da Licenciatura em Engenharia Electrónica Industrial e Computadores da Universidade do Minho.

Neste site existem simulações em Java *applets* de sistemas em malha aberta e malha fechada.

Nos sistemas em malha aberta existe um sistema hidráulico e um sistema eléctrico.

Nos sistemas em malha fechada existe um sistema térmico, um sistema hidráulico e um sistema eléctrico. O utilizador pode alterar os parâmetros do modelo e do controlo.

1.3. Objectivos

Este trabalho tem como objectivos principais: projectar, desenvolver e implementar, um laboratório virtual de simulação e modelização de problemas do mundo real na área de Engenharia de Controlo (EC), para apoio ao processo de ensino e aprendizagem do aluno. Os exemplos que irão servir de base serão, nas áreas de engenharia electrónica, dos sistemas térmicos, mecânicos e hidráulicos.

O laboratório virtual, SimLab, deve permitir ao utilizador escolher o problema de controlo a resolver e o tipo de controlo a implementar. Devido ao facto dos sistemas de controlo serem descritos por equações diferenciais, o laboratório deve incorporar e permitir testar vários métodos numéricos na resolução das equações diferenciais correspondentes aos sistemas. Os problemas de controlo e os métodos numéricos disponibilizados têm de estar completamente definidos, descritos e fundamentados teoricamente, de uma forma atractiva e estruturada.

O laboratório virtual irá permitir ao aluno testar os conhecimentos adquiridos durante a sua aprendizagem, de forma a auto avaliar-se permitindo desta forma identificar possíveis dificuldades.

1.4. O que distingue este simulador dos que já existem

O que torna o simulador desenvolvido neste trabalho, SimLab, diferente daqueles que já existem, alguns dos quais resumidamente descritos na secção anterior, é integração dos métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais que descrevem os sistemas com os diversos tipos de controlo possíveis. Desta forma, o utilizador/aluno pode aplicar e aprofundar os seus conhecimentos em ambas as áreas em estudo, Controlo e Métodos Numéricos.

1.5. Sistemas a modelizar no laboratório virtual

Os problemas de controlo a modelizar e simular neste laboratório virtual serão de quatro áreas: simulações de sistemas eléctricos, mecânicos, hidráulicos e térmicos.

Nos sistemas eléctricos são descritos um circuito RL (resistência e indutância), e vários circuitos RLC (resistência, indutância e condensador).

Nos sistemas mecânicos são descritos sistemas que envolvem movimento rectilíneo, plano inclinado, força elástica e pêndulos.

Nos sistemas hidráulicos são descritos sistemas com um, dois e três tanques.

Nos sistemas térmicos, os sistemas descritos envolvem o controlo da temperatura em líquidos e em recipientes.

As simulações serão realizadas em malha aberta e malha fechada. Em malha fechada serão usados o controlador On-Off e PID.

1.6. Linguagem de programação utilizada

Como este projecto pretende disponibilizar uma ferramenta disponível *on-line* para o ensino de Controlo e de Métodos Numéricos, as linguagens de programação a usar neste trabalho serão aquelas que estão vocacionadas para a construção de páginas *web* e seu conteúdo. Alguns exemplos dessas linguagens são o html, php, flash, Java, entre outras.

Das linguagens acima descritas aquela que mais se adapta à construção das simulações é o Java, pelas suas capacidades e também por ser aquela que é mais usada nas paginas que existem actualmente.

1.7. Métodos numéricos utilizados

Os métodos numéricos a utilizar neste projecto são aqueles que foram aprendidos na disciplina de Métodos Numéricos, mais precisamente os que se aplicam na resolução de equações diferenciais ordinárias, tais como os métodos de Runge-Kutta e o método preditor-corrector de Adams [5].

1.8. Organização da Tese

Esta tese está dividida em 5 capítulos.

No capítulo 2 é apresentada toda a fundamentação teórica necessária para a realização deste projecto. São apresentados neste capítulo os métodos numéricos utilizados assim como os seus algoritmos, e também os tipos de controlo utilizado neste projecto.

Também é feita uma pequena apresentação da linguagem de programação utilizada, o Java.

O capítulo 3 apresenta a modelização dos sistemas a serem implementados nas simulações, os algoritmos desenvolvidos para a implementação dos controladores de dos métodos numéricos e também a interface gráfica desenvolvida para o simulador.

No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos para algumas das simulações variando diversos parâmetros do simulador.

O capítulo 5 apresenta as conclusões obtidas com a realização deste trabalho, bem como sugestões para trabalho futuro.

CAPÍTULO 2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo é apresentada toda a fundamentação teórica necessária para a realização deste projecto de uma forma resumida, desde os métodos numéricos até ao controlo.

Apesar de existirem vários livros sobre métodos numéricos, o trabalho desenvolvido, foi principalmente baseado no livro computação numérica [5], por ser aquele que é usado na disciplina de Métodos Numéricos.

2.1. Métodos numéricos

Os métodos numéricos, são normalmente usados para obter soluções numéricas para determinados problemas, quando não é possível, ou é muito trabalhoso, usar os métodos analíticos.

Na base dos métodos numéricos está a análise numérica, que é o estudo de algoritmos com o objectivo de resolver problemas matemáticos [5].

Os métodos numéricos, ao contrário dos métodos analíticos, não produzem uma solução exacta mas sim uma solução aproximada à pretendida.

Os métodos numéricos são usados quando a solução para um determinado problema envolve muitos cálculos.

Muitos dos problemas reais são bastante complexos, pelo que por vezes encontra-se um para o qual os nossos conhecimentos matemáticos não são suficientes para a sua resolução sendo então necessário recorrer aos métodos numéricos.

A computação numérica é uma das áreas onde os métodos numéricos são utilizados, aplicando os seus algoritmos a programas computacionais com vista a resolução de determinados problemas matemáticos.

2.1.1. Equações diferenciais ordinárias

Em grande parte dos problemas de engenharia a relação entre a variável independente x e a variável dependente y , vem expressa sob a forma de uma equação diferencial, cuja forma genérica é a seguinte:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)\right) = 0 \quad (2.1)$$

sendo a variável independente x e a variável dependente o $y(x)$. A derivada de $y(x)$ de maior ordem, que aparece na equação (2.1), define a ordem da equação diferencial.

Normalmente coloca-se a equação diferencial em ordem à derivada de maior ordem, logo na forma geral fica:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right). \quad (2.2)$$

Se existir apenas uma variável independente, a equação diferencial é denominada de ordinária. Quando temos duas ou mais variáveis independentes temos uma equação diferencial às derivadas parciais.

Uma equação diferencial diz-se de primeira ordem se na equação está presente a função e sua derivada de primeira ordem:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \quad (2.3)$$

Uma equação diferencial é de segunda ordem se na equação estiverem presentes a função e suas derivadas de primeira e segunda ordem:

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)). \quad (2.4)$$

Uma equação diferencial é de ordem superior se na equação estiverem envolvidas a função as derivadas de primeira e segunda ordem e outras de ordem superior a dois.

2.1.2. Problemas com condições iniciais

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem tem a seguinte forma geral

$$\frac{dy(x)}{dt} = f(x, y) \text{ com } y(a) = y_0, \quad (2.5)$$

para $a \leq x \leq b$. O único valor auxiliar usado para calcular a solução é dado para o início do intervalo, $x=a$, sendo o problema caracterizado como uma equação diferencial de primeira ordem com condições iniciais.

Como os métodos numéricos transformam a equação diferencial numa equação às diferenças, torna-se necessário definir os pontos do intervalo $[a, b]$, para os quais a solução numérica vai ser calculada. Sendo h o espaçamento entre os pontos do intervalo $[a, b]$, tem-se então

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b \quad (2.6)$$

com $h = x_{i+1} - x_i$, para $i=0, 1, \dots, n-1$.

2.1.2.1. Tipos de métodos

Para resolução de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais existem dois tipos principais de métodos, os métodos de passo único e os métodos de passo múltiplo. Estes tipos de métodos são descritos ao longo das páginas seguintes.

- **Métodos de passo único**

Métodos de passo único, são métodos para resolução de equações diferenciais ordinárias, em que o resultado do passo seguinte, y_{i+1} , apenas é determinado pelo resultado do passo anterior, y_i .

- **Fórmulas de Euler**

Se no ponto inicial for calculado o valor do declive da tangente à curva $y(x)$, tem-se:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0). \quad (2.7)$$

A partir daqui pode-se calcular uma aproximação à função $y(x)$, no próximo ponto do intervalo, x_1 , que vai ter a designação de y_1 , utilizando a equação diferença

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (2.8)$$

sendo o $h=x_1-x_0$, o espaçamento entre os pontos do intervalo. Esta expressão é então a equação do método de Euler [5], para o primeiro passo.

Para efectuar o cálculo para qualquer ponto x_i do intervalo, existe a fórmula geral da equação de Euler que é

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

sendo uma equação de passo único e uma equação diferença de primeira ordem, além disso é também uma formula explícita, pois pode-se calcular a solução y_{i+1} , recursivamente usando a equação (2.9).

Esta aproximação y_{i+1} de $y(x)$, no ponto $x = x_{i+1}$ possui um erro de truncatura local de h^2 , $O(h^2)$, e o método é de primeira ordem.

Assim a expressão do erro de truncatura é:

$$e_t = \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_i) \text{ para } \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.10)$$

O tamanho do erro calculado está ligado à precisão da aproximação calculada, y_{i+1} . Nos algoritmos mais avançados para a resolução de equações diferenciais com condições iniciais, utiliza-se uma estimativa do erro de truncatura para ajustar o espaço entre os pontos x_i do intervalo $[a, b]$.

Convergência no método de Euler:

- Se a função $y(x)$ possui uma curvatura muito acentuada, a aproximação y_{i+1} , $i=0, 1, \dots, n-1$, obtida através da equação de Euler, depressa diverge da solução exacta.
- Se existir um espaçamento muito grande entre os pontos x_i e x_{i+1} , a aproximação y_{i+1} , $i=0, 1, \dots, n-1$, começa cedo a divergir da solução exacta.

A convergência pode ser melhorada através da diminuição do espaçamento entre os pontos. Se o espaçamento for diminuído para metade, o erro de truncatura diminui para um quarto.

• Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta [5] baseia-se nos mesmos princípios do método de Euler.

Para calcular a aproximação $y(x)$, no ponto x_{i+1} , usa-se uma aproximação linear à curva, $y(x)$.

A equação de Runge-Kutta mais simples de todas é a de primeira ordem, que é obtida através da expansão da serie de Taylor de $y(x_{i+1})$, ignorando os termos com derivadas de ordem igual ou superior a dois, resultando a equação seguinte:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (2.11)$$

sendo o erro global de truncatura dado por:

$$\frac{1}{2}h^2y''(\xi_i) \quad (2.12)$$

para ξ_i do intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, que é exactamente a equação do método de Euler descrita anteriormente.

Através do mesmo raciocínio, mas truncando a expansão em serie de Taylor após os termos que vêm em função das derivadas de ordem igual ou superior a três, obtém-se outra aproximação para $y(x_{i+1})$, cuja equação é:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2y''(x_i) \quad (2.13)$$

ou

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2[f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)] \quad (2.14)$$

Uma vez que

$$y''(x) = f'(x, y(x)) = f'_x + f'_y y'(x). \quad (2.15)$$

Sendo o erro local de truncatura dado por

$$\frac{1}{3!} h^3 y'''(\xi_i) \quad (2.16)$$

para ξ_i do intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Como a equação (2.14) vem em função das derivadas de f não é muito aconselhável o seu uso. Deve-se então recorrer a uma que lhe seja equivalente. Considere-se então a seguinte expressão na forma geral

$$y_{i+1} = y_i + \alpha_1 p + \alpha_2 q, \quad (2.17)$$

em que

$$p = hf(x_i, y_i) \quad (2.18)$$

e

$$q = hf(x_i + \alpha_3 h, y_i + \alpha_3 p), \quad (2.19)$$

com α_1 , α_2 e α_3 constantes a calcular. Substituindo p e q na equação (2.17) e usando a expansão em série de Taylor para $f(x_i + \alpha_3 h, y_i + \alpha_3 p)$, obtém-se

$$y_{i+1} \approx y_i + \alpha_1 hf(x_i, y_i) + \alpha_2 h[f(x_i, y_i) + \alpha_3 hf'_x(x_i, y_i) + \alpha_3 p f'_y(x_i, y_i)] \quad (2.20)$$

ou

$$y_{i+1} \approx y_i + (\alpha_1 + \alpha_2)hf(x_i, y_i) + \alpha_2 \alpha_3 h^2 f'_x(x_i, y_i) + \alpha_2 \alpha_3 h^2 f(x_i, y_i) f'_y(x_i, y_i). \quad (2.21)$$

Igualando os termos da equação (2.21) com os da equação (2.14), obtém-se

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ e } \alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{2}.$$

Arbitrando um valor para α_3 , pois são duas equações e três incógnitas, conclui-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$.

Sendo a expressão final

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(p + q), i = 0, 1, \dots \quad (2.22)$$

com $p = hf(x_i, y_i)$ e $q = hf(x_{i+1}, y_i + p)$, definindo-se assim a equação para o método de Runge-Kutta de segunda ordem, sendo esta uma formula explícita de passo único.

A interpretação possível da variação Δy em (2.22), com $y_{i+1} = y_i + \Delta y$, é de uma média pesada para o declive da tangente à curva, $y(x)$, no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Esta média tem em consideração o declive da tangente a curva em x_i e uma aproximação do declive da tangente em x_{i+1} .

Usando a igualdade presente na equação (2.23)

$$y''' = f''(x, y(x)) = f''_{xx} + 2f''_{xy}y'(x) + f''_{yy}(y'(x))^2 + f'_x f'_y + (f'_y)^2 y'(x) \quad (2.23)$$

obtém-se a expressão para o erro local de truncatura da equação de Runge-Kutta de segunda ordem

$$e_T = \frac{1}{6}h^3 \left[\frac{3}{2}(f''_{yy}(y'(x))^2 + 2f''_{xy}y'(x) + f''_{xx}) - f'_x - f'_y y'(x) \right]. \quad (2.24)$$

Confirmando-se assim que a equação (2.23) é de segunda ordem.

Para se obter as fórmulas de Runge-Kutta para ordem superior usa-se um processo semelhante ao das anteriores.

A fórmula de Runge-Kutta de terceira ordem é a seguinte

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(p + 4q + r), i = 0, 1, \dots \quad (2.25)$$

com $p = hf(x_i, y_i)$, $q = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}p\right)$ e $r = hf(x_{i+1}, y_i - p + 2q)$.

O erro de truncatura local é $O(h^4)$.

A fórmula de Runge-Kutta de quarta ordem, é aquela que das mais conhecidas do método produz melhores resultados. Apesar de não ser a formula mais simples de implementar, pois são necessários quatro cálculos de f , ele tem erro de truncatura local $O(h^5)$ e é uma formula de passo único. Para efectuar o calculo de y_{i+1} apenas é necessário conhecer o ponto anterior (x_i, y_i) ,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(p + 2q + 2r + s), i = 0, 1, \dots \quad (2.26)$$

com $p = hf(x_i, y_i)$, $q = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}p\right)$, $r = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}q\right)$ e $s = hf(x_{i+1}, y_i + r)$.

Os valores de p , q , r e s são estimativas da variação verificada em y no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Dos valores p e s tem-se estimativas que se baseiam no declive da tangente à curva $y(x)$ no inicio e no fim do intervalo respectivamente. Enquanto que os valores de q e r são estimativas da variação em y baseando-se em aproximações ao declive da tangente à curva, $y(x)$, no ponto médio do intervalo, $x_i + 1/2h$.

O algoritmo seguinte, algoritmo 2.1, permite implementar o método de Runge-Kutta para as quatro equações mencionadas. O parâmetro ordem permite escolher a equação pretendida para a resolução do problema.

Algoritmo 2.1: Algoritmo Método de Runge-Kutta, tal como em [5].

1. Ler *ordem* (1, 2, 3 ou 4), h , x_0 , y_0 e *sup* e calcular *tol*.
2. Introduzir a função $f(x, y)$.
3. Fazer $i=0$.

4. $x_{i+1} = x_i + h$.
 5. Se $(x_{i+1} - sup) \leq tol^{1/2}$ então.
 - 5.1. Calcular $f_i = f(x_i, y_i)$ e $p_1 = hf_1$.
 - 5.2. Se $ordem = 1$ então fazer $c_1 = 1$.
 - 5.3. Senão
 - 5.3.1. Se $ordem = 2$ então $c_1 = 1, c_2 = 1$ e calcular $z_i = y_i + p_1, g_i = f(x_{i+1}, z_i)$ e $p_2 = hg_i$.
 - 5.3.2. Senão
 - 5.3.2.1 Se $ordem = 3$ então fazer $c_1 = 0.5, c_3 = c_1$ e $c_2 = 4c_1$ e calcular $z_i = y_i + 0.5p_1, r_i = x_i + 0.5h, g_i = f(r_i, z_i), p_2 = hg_i, t_i = y_i - p_1 + 2p_2, g_i = f(x_{i+1}, t_i)$ e $p_2 = hg_i$.
 - 5.3.2.2 Senão fazer $c_1 = 2/3, c_4 = c_1, c_2 = 2c_1$ e $c_3 = c_2$ e calcular $z_i = y_i + 0.5p_1, r_i = x_i + 0.5h, g_i = f(r_i, z_i), p_2 = hg_i, z_i = y_i + 0.5p_2, g_i = f(r_i, z_i), p_3 = hg_i, z_i = y_i + 0.5p_3, g_i = f(x_{i+1}, t_i)$ e $p_4 = hg_i$.
 - 5.4. Calcular $y_{i+1} = y_i + (\sum_{j=1}^{ordem} c_j p_j) / ordem$.
 - 5.5. Fazer $i = i + 1, n = i$ e ir para o passo 4.
6. Terminar com $y(x) \leftarrow (y_i, i = 0, 1, \dots, n)$.

- **Métodos de passo múltiplo**

Um método de passo múltiplo é um método, em que o resultado do passo seguinte, y_{i+1} , é determinado pelo resultado dos passos anteriores.

- **Métodos preditores-correctores de Euler e Adams**

Para a resolução de uma equação diferencial através de um método preditor-corrector é necessário implementar dois tipos de fórmulas, uma implícita e outra explícita.

Geralmente as fórmulas implícitas são mais precisas que as explícitas, e originam normalmente equações diferença bem condicionadas, mas por outro lado o valor de y_{i+1} está definido implicitamente. Se a função $f(x, y(x))$ é não linear, é necessário uma equação não linear para calcular o valor de y_{i+1} .

A fórmula explícita é a primeira a ser usada, para prever a solução de y_{i+2} , em cada ponto x_{i+2} do intervalo para o qual se quer a solução. À equação diferença dá-se o nome de fórmula preditora, e resultado y_{i+2}^p , este valor é posteriormente corrigido utilizando-o no membro do lado direito da formula implícita. A esta equação dá-se o nome de formula correctora, e daqui determina-se o valor de y_{i+2}^c que é a melhor aproximação a $y(x)$ no ponto x_{i+2} .

As fórmulas preditora e correctora, usadas num método preditor-corrector, devem ter a mesma ordem.

O método preditor-corrector mais simples é o de Euler, que usa a equação de Euler melhorada de passo duplo como formula preditora,

$$y_{i+2}^p = y_i + 2hf(x_{i+1}, y_{i+1}) \quad (2.27)$$

e como formula correctora usa a equação de Adams-Moulton de passo único

$$y_{i+2}^c = y_{i+1} + \frac{1}{2}h[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2}^p)] \quad (2.28)$$

para $i=0, 1, \dots$

Os erros de truncatura para das formulas (2.27) e (2.28), podem ser da forma $y_{i+2}^p - y(x_{i+2}) = r_i^p h^3 + \mathcal{O}(h^4)$ e $y_{i+2}^c - y(x_{i+2}) = r_i^c h^3 + \mathcal{O}(h^4)$ com $r_i^p = \frac{1}{3}y'''(x_i)$ e $r_i^c = -\frac{1}{12}y'''(x_i)$.

Se h^3 for explicitado na primeira formula do erro e substituindo na segunda, obtém-se

$$y_{i+2}^c - y(x_{i+2}) \approx r_i^c \frac{y_{i+2}^p - y(x_{i+2})}{r_i^p} \text{ ou } y_{i+2}^c - y(x_{i+2}) \approx \frac{r_i^c}{r_i^p - r_i^c} [y_{i+2}^p - y_{i+2}^c]. \quad (2.29)$$

Substituído os valores de r_i^p e r_i^c , já definidos anteriormente, na equação (2.29), encontra-se o erro local para o valor corrigido obtido através do método preditor-corrector de Euler

$$y_{i+2}^c - y(x_{i+2}) \approx -\frac{1}{5}[y_{i+2}^p - y_{i+2}^c] \quad (2.30)$$

Em função dos valores y_{i+2}^p e y_{i+2}^c .

O método preditor-corrector mais conhecido é o de Adams de segunda ordem, que faz uso da equação de Adams-Bashforth de segunda ordem com fórmula preditora e da de Adams-Moulton de segunda ordem como fórmula correctora. Assim tem-se o método definido pelas seguintes equações

$$y_{i+2}^p = y_{i+1} + \frac{1}{2}h[3f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)] \quad (2.31)$$

e

$$y_{i+2}^c = y_{i+1} + \frac{1}{2}h[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2}^p)] \quad (2.32)$$

para $i=0, 1, \dots$

Fazendo uma dedução idêntica a do método preditor-corrector de Euler, e sendo os erros locais das expressões (2.31) e (2.32) iguais a $\frac{5}{12}h^3y'''(\xi_i)$ e $-\frac{1}{12}h^3y'''(\eta_i)$ respectivamente, a partir da equação (2.29), e como para este caso $r_i^p = \frac{5}{12}y'''(x_i)$ e $r_i^c = -\frac{1}{12}h^3y'''(x_i)$, obtém-se a seguinte aproximação ao erro local do valor corrigido do método preditor-corrector de Adams de segunda ordem,

$$y_{i+2}^c - y(x_{i+2}) \approx -\frac{1}{6}[y_{i+2}^p - y_{i+2}^c]. \quad (3.33)$$

Um dos problemas de utilizar métodos preditores-correctores com fórmulas de passo múltiplo, é a necessidade de calcular vários valores auxiliares, que são necessários para a implementação do método em conjunto com a condição inicial y_0 . O número de valores auxiliares necessários para o cálculo depende do número de passos da fórmula preditora e correctora, mas devem ser calculados através de uma fórmula de passo único, cujos resultados sejam aproximações com erros locais da mesma ordem dos do método preditor-corrector, pois se os valores auxiliares calculados tiverem erros superiores aos do método preditor-corrector, o método estará a ser mal aproveitado pois originará resultados menos precisos, mas se os valores auxiliares forem de grande precisão, acabaram por ser mal aproveitados pois os valores seguintes não serão tão precisos. Um dos métodos para calcular estes valores auxiliares é a utilização do método de Runge-Kutta da ordem mais adequada para a situação.

O método de Runge-Kutta de segunda ordem é o mais adequado para o método preditor-corrector de Adams.

O método preditor-corrector de Adams de quarta ordem, embora trabalhoso, fornece resultados bastante satisfatórios. Este método faz uso da equação explícita de Adams-Bashforth de quarta ordem e de quatro passos, como formula preditora,

$$y_{i+4}^p = y_{i+3} + \frac{1}{24}h[55f(x_{i+3}, y_{i+3}) - 59f(x_{i+2}, y_{i+2}) + 37f(x_{i+1}, y_{i+1}) - 9f(x_i, y_i)] \quad (2.34)$$

cujo erro local é

$$e_T = \frac{251}{720}h^5y^{(v)}(\xi_i), \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad (2.35)$$

e da equação implícita de Adams-Moulton de quarta ordem e de três passos como fórmula correctora

$$y_{i+4}^c = y_{i+3} + \frac{1}{24}h[9f(x_{i+4}, y_{i+4}^p) + 19f(x_{i+3}, y_{i+3}) - 5f(x_{i+2}, y_{i+2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad (2.36)$$

para $i=0, 1, \dots$. O erro de truncatura local da fórmula correctora é

$$e_t = -\frac{19}{720}h^5 y^{(v)}(\eta_i), \eta_i \in [x_{i+1}, x_{i+4}]. \quad (2.37)$$

Usando a equação (2.30) para fazer a estimativa do erro local do valor calculado pela fórmula correctora no método, a partir do valor previsto, obtém-se

$$y_{i+4}^c - y(x_{i+4}) \approx -\frac{19}{270}(y_{i+4}^p - y_{i+4}^c). \quad (2.38)$$

O algoritmo seguinte, algoritmo 2.2, apresenta os métodos preditores-correctores de segunda e quarta ordem de Adams, o parâmetro ordem é usado para fazer a selecção do método que se quer implementar.

Algoritmo 2.2: Algoritmo método preditor-corrector de Adams, tal como e [5].

1. Ler *ordem* (2 ou 4), h, x_0, y_0 e *sup* e calcular *tol*.
2. Introduzir a função $f(x, y)$.
3. Para $j = 0, \textit{ordem} - 2$.
 - 3.1. Calcular $x_{j+1} = x_j + h$.
 - 3.2. Calcular $f_j = f(x_j, y_j)$ e $p_1 = hf_j$.
 - 3.2.1. Se *ordem* = 2 então fazer $c_1 = 1, c_2 = 1$ e calcular $z_j = y_j + p_1, g_j = f(x_{j+1}, z_j)$ e $p_2 = hg_j$.
 - 3.2.2. Senão fazer $c_1 = \frac{2}{3}, c_4 = c_1, c_2 = 2c_1$ e $c_3 = c_2$ e calcular $z_j = y_j + 0.5p_1, r_j = x_j + 0.5h, g_j = f(r_j, z_j), p_2 = hg_j, z_j = y_j + 0.5p_2, g_j = f(r_j, z_j), p_3hg_j, z_j = y_j + p_3, g_j = f(x_{j+1}, z_j)$ e $p_4 = hg_j$.
 - 3.3. Calcular $y_{j+1} = y_j + (\sum_{k=1}^{\textit{ordem}} c_k p_k) / \textit{ordem}$.
4. Fazer $i = j + 1$.
5. Calcular $x_{i+1} = x_i + h$.
6. Se $(x_{i+1} - \textit{sup}) \leq \textit{tol}^{1/2}$ então
 - 6.1. Calcular $f_i = f(x_i, y_i)$
 - 6.2. Se *ordem*=2 então calcular $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ e $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i)$.

6.3. Senão calcular $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$, $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ e $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$.

6.4. Fazer $i = i + 1$, $n = i$ e ir para o passo 5.

7. Terminar com $y(x) \leftarrow (y_i, i = 0, 1, \dots, n)$.

2.1.3. Sistemas de equações diferenciais

A forma geral de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é a seguinte

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \end{cases} \quad (2.39)$$

para $a \leq x \leq b$. f_1, f_2, \dots, f_n são funções dadas e nas $n+1$ variáveis: a variável independente x e as n variáveis dependentes y .

Se o sistema for solucionável existirão n soluções. Existirá uma única família de soluções se forem fornecidas as n condições auxiliares. Se estas condições auxiliares forem especificadas para o mesmo valor da variável independente x , especialmente para o ponto inicial do intervalo $y_i(a) = c_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, o problema chama-se de sistema de equações diferenciais de primeira ordem com condições iniciais.

Assim se descrevem a seguir os métodos numéricos para resolução de equações diferenciais.

- **Equações de Runge-Kutta e esquemas preditores-correctores**

Qualquer dos métodos referidos anteriormente para resolução de uma equação diferencial de primeira ordem com condições iniciais, pode ser usado para a resolução de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem com condições iniciais.

Para se usar os métodos já falados em sistemas de equações diferenciais com condições iniciais deve-se seguir a seguinte estratégia:

- Implementar a equação diferença do método a cada uma das equações do sistema, com atenção a equação f_i que define a equação i do sistema.

Definindo-se assim uma solução constituída por uma família de valores, $y_{1,i}, y_{2,i}, y_{3,i}, \dots, y_{n,i}$, gerada passo a passo, $i = 1, 2, 3, \dots$, das mesma maneira como se fazia para uma só equação.

Embora a implementação das fórmulas numéricas não tenha grandes dificuldades, no método de Runge-Kutta e nos métodos preditores-correctores, é necessário ter em atenção a ordem com que os cálculos são efectuados. Por exemplo:

- Para implementar o método de Runge-Kutta de segunda ordem, as equações a serem usadas para a resolução de um sistema de n equações diferenciais, para o passo i ($i=0, 1, \dots$) são

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + \frac{1}{2}(p_1 + q_1), \quad (2.40)$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{1}{2}(p_2 + q_2), \quad (2.41)$$

..., e

$$y_{n,i+1} = y_{n,i} + \frac{1}{2}(p_n + q_n) \quad (2.42)$$

em que

$$p_1 = hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}), \quad (2.43)$$

$$q_1 = hf_1(x_{i+1}, y_{1,i} + p_1, y_{2,i} + p_2, \dots, y_{n,i} + p_n), \quad (2.44)$$

$$p_2 = hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}), \quad (2.45)$$

$$q_2 = hf_2(x_{i+1}, y_{1,i} + p_1, y_{2,i} + p_2, \dots, y_{n,i} + p_n), \quad (2.46)$$

$$p_n = hf_n(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}) \quad (2.47)$$

e

$$q_n = hf_n(x_{i+1}, y_{1,i} + p_1, y_{2,i} + p_2, \dots, y_{n,i} + p_n). \quad (2.48)$$

Os cálculos devem começar pelos valores de p_1, p_2, \dots, p_n , visto estes serem necessários para o calculo dos valores de q_1, q_2, \dots, q_n , que são calculados a seguir, e por ultimo devem ser calculados os valores dos $y_{1,i+1}, y_{2,i+1}, \dots, y_{n,i+1}$ de cada equação, referentes ao passo i .

- Para a implementação do método preditor-corrector de Adams de segunda ordem, são necessárias duas fórmulas para cada equação do sistema.

$$y_{1,i+2}^p = y_{1,i+1} + \frac{1}{2}h[3f_1(x_{i+1}, y_{1,i+1}, \dots, y_{n,i+1}) - f_1(x_i, y_{1,i}, \dots, y_{n,i})], \quad (2.49)$$

$$y_{1,i+2}^c = y_{1,i+1} + \frac{1}{2}h[f_1(x_{i+2}, y_{1,i+2}^p, \dots, y_{n,i+2}^p) + f_1(x_{i+1}, y_{1,i+1}, \dots, y_{n,i+1})], \quad (2.50)$$

$$y_{2,i+2}^p = y_{2,i+1} + \frac{1}{2}h[3f_2(x_{i+1}, y_{1,i+1}, \dots, y_{n,i+1}) - f_2(x_i, y_{1,i}, \dots, y_{n,i})], \quad (2.51)$$

$$y_{2,i+2}^c = y_{2,i+1} + \frac{1}{2}h[f_2(x_{i+2}, y_{1,i+2}^p, \dots, y_{n,i+2}^p) + f_2(x_{i+1}, y_{1,i+1}, \dots, y_{n,i+1})], \quad (2.52)$$

...

e

$$y_{n,i+2}^p = y_{n,i+1} + \frac{1}{2}h[3f_n(x_{i+1}, y_{1,i+1}, \dots, y_{n,i+1}) - f_n(x_i, y_{1,i}, \dots, y_{n,i})], \quad (2.53)$$

$$y_{n,i+2}^c = y_{n,i+1} + \frac{1}{2}h[f_n(x_{i+2}, y_{1,i+2}^p, \dots, y_{n,i+2}^p) + f_n(x_{i+1}, y_{1,i+1}, \dots, y_{n,i+1})]. \quad (2.54)$$

Cada valor corrigido tem de ser calculado em função dos valores previstos de todas as n variáveis dependentes, logo, os cálculos devem ser começados pelos valores previstos $y_{1,i+2}^p, y_{2,i+2}^p, \dots, y_{n,i+2}^p$, calculando-se a seguir os valores corrigidos $y_{1,i+2}^c, y_{2,i+2}^c, \dots, y_{n,i+2}^c$.

O algoritmo seguinte implementa os dois métodos referidos acima para a resolução de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. O parâmetro *equa* é usado para fazer a selecção do método.

Algoritmo 2.3: Algoritmo para resolução de sistemas de equações, através dos métodos de Runge-Kutta e predictor-corrector de Adams de segunda ordem, tal como em [5].

1. Ler n , *equa* (“R. K.” ou “P. C.”), h , x_0 e *sup* e calcular *tol*.
2. Para $i=1, \dots, n$ ler y_{i0} .
3. Para $i=1, \dots, n$ introduzir as funções $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.
4. Fazer $j=0$.
5. Calcular $x_{j+1} = x_j + h$.
6. Se $(x_{j+1} - \text{sup}) \leq \text{tol}^{1/2}$ então
 - 6.1. Para $i=1, \dots, n$ calcular $f_{ij} = f_i(x_j, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})$, $p_i = hf_{ij}$ e $z_i = y_{ij} + p_i$,
 - 6.2. Para $i=1, \dots, n$ calcular $g_i = f_i(x_{j+1}, z_1, z_2, \dots, z_n)$ e $q_i = hg_i$.
 - 6.3. Para $i=1, \dots, n$ calcular $y_{i,j+1} = y_{ij} + \frac{1}{2}(p_i + q_i)$.
 - 6.4. Se *equa* = “R. K.” então fazer $j = j + 1$, $m = j$ e ir para o passo 5.
 - 6.5. (senão)

6.5.1. Calcular $x_{j+2} = x_{j+1} + h$.

6.5.2. Se $(x_{j+2} - \text{sup}) \leq \text{tol}^{1/2}$ então

6.5.2.1. Para $i=1, \dots, n$ calcular $f_{i,j+1} = f_i(x_{j+1}, y_{1,j+1}, y_{2,j+1}, \dots, y_{n,j+1})$,

$$e y_{i,j+2} = y_{i,j+1} + \frac{h}{2}(3f_{i,j+1} - f_{i,j}).$$

6.5.2.2. Para $i=1, \dots, n$ calcular $g_i = f_i(x_{j+2}, y_{1,j+2}, y_{2,j+2}, \dots, y_{n,j+2})$.

6.5.2.3. Para $i=1, \dots, n$ calcular $y_{i,j+1} = y_{i,j+1} + \frac{h}{2}(g_i + f_{i,j+1})$.

6.5.2.4. Fazer $j = j + 1$, $m = j + 1$ e ir para o passo 6.5.1.

7. Terminar com $y(x) \leftarrow ((y_{i,j}, i = 1, \dots, n), j = 0, 1, \dots, m)$.

2.1.4. Equações diferenciais de ordem igual ou superior a dois

A expressão $F(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0$, é a forma geral implícita de uma equação diferencial ordinária de ordem n , na variável dependente $y(x)$, tendo como variável independente x . Se esta equação for resolvida em ordem à derivada de $y(x)$ de ordem mais elevada origina a seguinte equação

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2.55)$$

que em conjunto com as suas n condições iniciais $y(a) = c_0, y'(a) = c_1, y''(a) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = c_{n-1}$, definem um problema com condições iniciais, que tem solução única no intervalo $[a, b]$.

Para se poder resolver um problema com condições iniciais como aquele definido na expressão (2.40), é necessário transformar a equação diferencial de ordem n em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Para se conseguir efectuar esta transformação é necessário definir $n-1$ novas variáveis dependentes. Assim designando $y(x)$ por $y_1(x)$,

$$y_1(x) \leftarrow y(x), \quad (2.56)$$

E fazendo agora o mesmo para as outras variáveis dependentes, estas ficam definidas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y_2(x) = y_1'(x) \text{ ou } y_1'(x) \\ y_3(x) = y_2'(x) \text{ ou } y_2''(x) \\ y_4(x) = y_3'(x) \text{ ou } y_3'''(x) \\ \dots \\ y_n(x) = y_{n-1}'(x) \text{ ou } y^{(n-1)}(x) \end{cases} \quad (2.57)$$

As condições iniciais passam então a ser $y_1(a) = c_0, y_2(a) = c_1, y_3(a) = c_2, \dots, y_n(a) = c_{n-1}$.

Assim o sistema de n equações diferenciais de primeira ordem resultante da definição das novas variáveis, e que é equivalente à equação diferencial de ordem n definida anteriormente, tem a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n) \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Onde a função $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ é a função que define a equação diferencial de ordem superior.

Agora para resolver este sistema, apenas é necessário aplicar o algoritmo para resolução de equações diferenciais (já referido em outra secção), como se faria para outro sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

2.2. Controlo

A maior parte das pessoas aplica conceitos de controlo sem se quer dar por isso. Se o som da televisão está muito alto, com o comando baixa-se o volume; se no duche a água está muito quente, abre-se a água fria para se obter a temperatura desejada. Em ambas as situações descritas anteriormente existe uma tomada de conhecimento e uma avaliação da situação, para posteriormente se actuar conforme a situação. Passando para o mundo das máquinas, o processo é semelhante: tem-se algo que monitoriza, avalia e actua de maneira conveniente à situação a que é exposto.

Com o avanço da tecnologia, hoje em dia, é possível automatizar completamente todo o sistema de controlo, dispensando a utilização de um controlador humano.

2.2.1. Controlo em Malha aberta

Neste tipo de controlador aplica-se um sinal de controlo à entrada do sistema, e espera-se que a variável controlada apresente o comportamento desejado. Neste tipo de

controlo a entrada do controlador não depende da saída, ou seja, não existe qualquer cálculo de um parâmetro de erro que seja usado pelo controlador para controlar a saída.

O problema deste tipo de controlo é que este é muito sensível a perturbações, apresentando os resultados esperados apenas se não existirem perturbações de origem interna ou externa. Isto acontece por não existir uma comparação entre a variável de referência e a variável controlada, fazendo com que o controlador actue como se não existissem perturbações.

A figura 2-1 ilustra o esquema de um sistema em malha aberta.

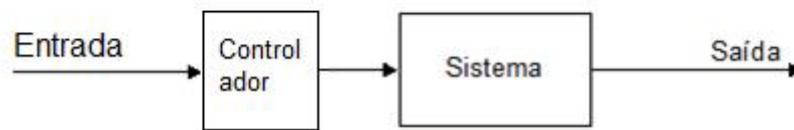


Figura 2-1 - Sistema em malha aberta.

2.2.2. Realimentação negativa

O controlo por realimentação negativa consiste basicamente na compensação da diferença da variável de saída relativamente à referência. Isto é feito, subtraindo o valor da variável de referência pelo valor da variável de saída do sensor, obtendo-se o valor do erro, $e(t)$. O erro é então usado pelo controlador, para calcular a variável de controlo, de maneira a fazer com que o valor da variável controlada (saída) se aproxime do valor da variável de referência.

O processo de realimentação negativa é ilustrado na figura 2-2 [30].

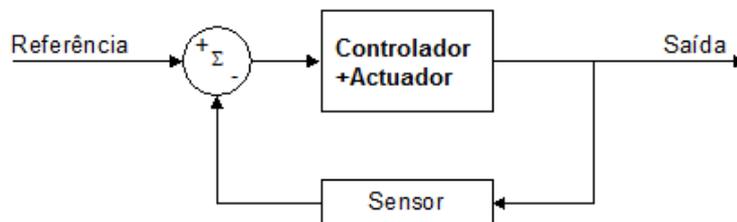


Figura 2-2 - Controlo com realimentação negativa

2.2.3. Controlo em Malha fechada

Um sistema em malha fechada é basicamente um sistema com realimentação, como descrito na secção 2.2.2.

A vantagem de usar este tipo de controlo é tornar o sistema a que está aplicado praticamente insensível a perturbações externas e internas, pois devido à realimentação o sistema é capaz de compensar qualquer perturbação existente no sistema.

Neste tipo de controlo a estabilidade é bastante importante.

Existem vários tipos de controladores que funcionam em malha fechada, mas os mais conhecidos devem ser, talvez, o controlador On-Off, o proporcional (P), o proporcional derivativo (PD), o proporcional integral (PI) e o proporcional integral e derivativo (PID).

Na figura 2-3 [31] está ilustrado o esquema de um sistema com controlo em malha fechada.

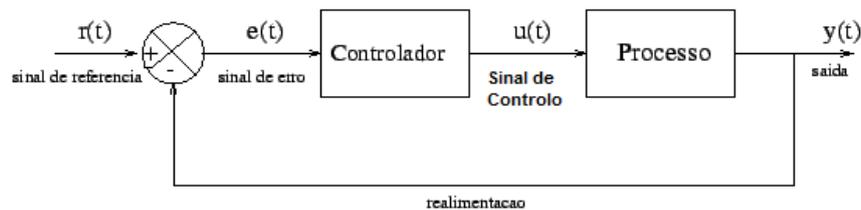


Figura 2-3 - Sistema em malha fechada

2.2.4. Controladores Analógicos

Os controladores analógicos processam sinais eléctricos ou pneumáticos contínuos, actuando sobre os elementos finais de controlo, os quais variam continuamente a sua acção [6].

Nas secções seguintes são apresentados o controlador On-Off e a versão analógica do controlador PID.

2.2.5. Controlador On-Off

O controlo on-off apesar de ser o mais simples de implementar é também o mais limitado, pois apenas tem dois estados, ligado ou desligado. Por ser simples de implementar ainda é largamente usado.

Na figura 2-4 [32] está ilustrado um sistema com controlador On-Off.

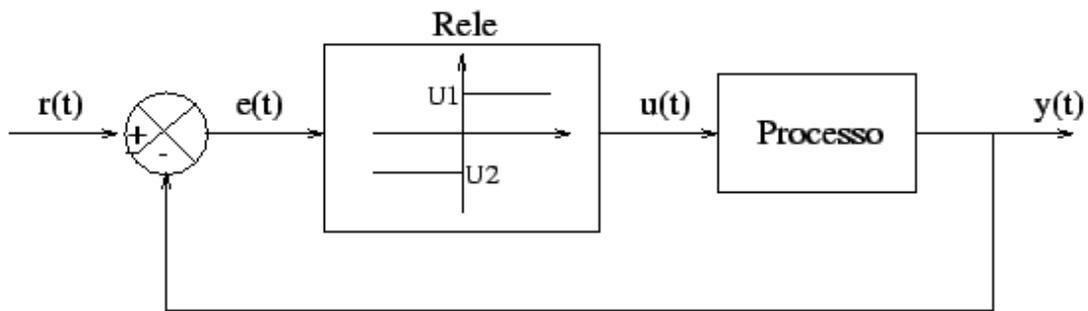


Figura 2-4 - Esquema de um sistema com controlador On-Off

Com este tipo de controlador é estabelecido um valor máximo (U_{max}) e um valor mínimo (U_{min}) para a variável de controle $u(t)$. Assim se o erro (diferença entre a variável de referência e a variável de saída) for maior que zero então o sinal de controle será U_{max} (ligado), se o erro for menor que zero o sinal de controle será U_{min} (desligado).

$$\text{se } e(t) > 0 \rightarrow u(t) = U_{max} \quad (2.59)$$

$$\text{se } e(t) < 0 \rightarrow u(t) = U_{min} \quad (2.60)$$

Devido a facto de as comutações deste tipo de controlador poderem levar a um rápido desgaste do actuador, define-se uma margem de histerese para impedir que tal aconteça. Esta margem de histerese está entre os valores de saída Y_{max} e Y_{min} , relativamente ao valor de referência.

A margem de histerese deve ser escolhida tendo em conta o processo a frequência de comutação do actuador e a precisão requerida pelo sistema.

A figura 2-5 [30] ilustra de forma gráfica a margem de histerese.

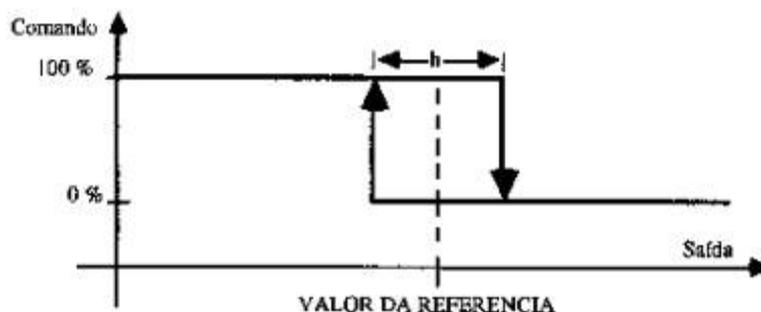


Figura 2-5 - Margem de histerese de um controlador On-Off.

Na figura 2-6 pode-se ver o comportamento de um sistema com controlador on-off.

Como se pode ver na figura 2-6 [32] existe uma variação da variável $y(t)$ entre um valor máximo e um valor mínimo, em torno do valor de referência. Como se pode ver também na figura 2-6, quando o sinal de controlo $u(t)$, está no seu valor máximo (ligado), o sinal de saída $y(t)$, também atinge o seu valor máximo, e quando o sinal de controlo está no seu valor mínimo (desligado), o valor da variável de saída também atinge o seu valor mínimo.

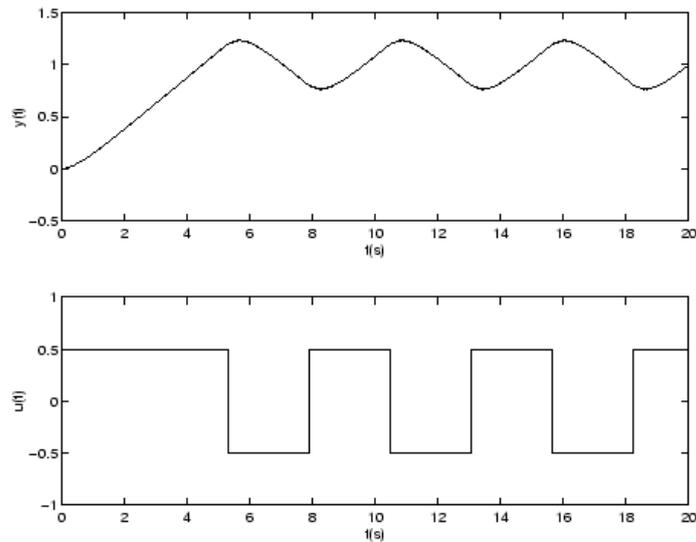


Figura 2-6 - Comportamento de um sistema com controlador On-Off.

A aplicação deste controlador está normalmente limitada a aplicações onde não é necessário precisão ou um bom desempenho dinâmico.

2.2.6. Controlador PID Analógico

A sigla PID é de integral, proporcional e derivativo, que em termos de controlo, quer dizer que este tipo de controlador implementa as acções proporcional, integral e derivativa para produzir um sinal de controlo. Devido à grande robustez deste tipo de controlador ele é muito usado na indústria.

A figura 2-7 [30] ilustra o esquema de um sistema com controlador PID.

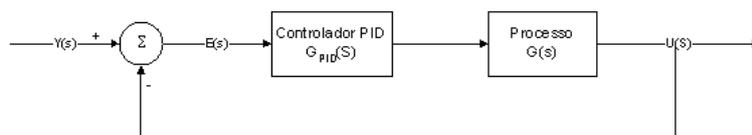


Figura 2-7 - Esquema básico de um sistema com controlador PID

A equação matemática que descreve o controlador PID analógico é a seguinte:

$$C(t) = C_{est} + K_p \left(E(t) + \frac{1}{\tau_i} \int E(t') dt' + \tau_d \frac{dE}{dt} \right) \quad (2.61)$$

Onde K_p – ganho proporcional do controlador

τ_i – constante de tempo integral

τ_d – constante de tempo derivativo

C_{est} – acção de controlo em estado estacionário

E – erro

C - acção de controlo.

- **Acção proporcional**

Esta acção é sempre aplicada.

Alguns processos simples podem ser controlados satisfatoriamente apenas com esta acção. Então neste caso tem-se apenas

$$C(t) = K_p E(t) \quad (2.62)$$

Mas normalmente esta acção não consegue eliminar o erro em regime permanente. Para diminuir esse erro pode-se aumentar o ganho proporcional mas ao fazer isso pode-se estar a fazer com que o sistema oscile e que até se pode tornar instável.

Este tipo de controlo é constituído apenas por um amplificador com ganho ajustável, em que a entrada é o erro (variável de referencia – variável de saída) e a saída é a variável de controlo.

- **Acção Integral**

Esta acção elimina o erro estacionário que resulta quando se usa apenas a acção proporcional, mas em contra partida, a resposta do sistema pode ficar instável e pode mesmo ocorrer a saturação do controlador (fenómeno de ‘wind-up’).

$$C(t) = \frac{1}{\tau_i} \int E(t') dt' \quad (2.63)$$

Fenómeno de “Wind-up”

O fenómeno de “Wind-up” ocorre, quando o valor da variável de controlo atinge o limite máximo, ou mínimo, do actuador, fazendo com que o sinal de controlo sature. Isto faz com que o actuador permaneça no seu limite máximo, ou mínimo, independentemente da saída do sistema.

Mas quando se usa um controlador com acção integral, como neste caso, o erro continua a ser integrado e o termo integral tende a tornar-se muito grande.

Para que o controlador saia da saturação é necessário que o termo integral diminua. Para que tal aconteça deve-se esperar que o sinal de erro troque de sinal e, por um longo período tempo, seja aplicado na entrada do controlador, um sinal de erro de sinal oposto. Disto resulta que a resposta transitória do sistema tenderá a ficar lenta e oscilatória.

- **Acção Derivativa**

A acção derivativa provoca um efeito antecipativo na resposta, pois baseia-se no cálculo da derivada do erro, que normalmente provoca a atenuação do efeito oscilatório causado pela acção integral, normalmente esta acção provoca uma melhoria na resposta do sistema, mas evita-se a sua utilização em sistemas que apresentem muito ruído.

$$C(t) = \tau_d \frac{dE}{dt} \quad (2.64)$$

Em resumo, a acção proporcional tem como função reduzir o tempo de subida (rise time), que é o tempo que o sinal demora a ir dos 10% aos 90% do seu valor máximo, e também diminuir o erro em regime permanente.

A acção integral deve eliminar o erro em regime permanente, mas em contra partida irá piorar a resposta transitória

A acção derivativa tem como objectivo aumentar a estabilidade do sistema, reduzindo o overshoot (sobreelevação do valor de saída relativamente ao valor estabelecido) e melhorando a resposta transitória.

A tabela 2-1 [30] apresenta o efeito de cada uma das acções de controlo.

É importante referir, que devido aos factores serem dependentes entre si, esta correlação pode não ser correcta. Por exemplo a mudança de valor de uma das variáveis,

pode fazer com os valores das outras também varie. Logo a tabela 2-1 deve apenas ser usada para determinar os valores de K_p , τ_i e τ_d .

O setting time (referido na tabela 2-1) é o tempo que a variável de saída demora a atingir 2% do valor em regime permanente.

Tabela 2-1 - Influencia das várias acções do controlador PID

	<i>Rise Time</i>	<i>Overshoot</i>	<i>Setting time</i>	$e(\infty)$
K_p	Diminui	Aumenta	Sem efeito	Diminui
τ_i	Diminui	Aumenta	Aumenta	Elimina
τ_d	Sem efeito	Diminui	Diminui	Sem efeito

Em controlo industrial normalmente usa-se a percentagem de banda proporcional (%BP) em vez do ganho proporcional (K_p).

$$\%BP = \frac{100}{K_p} \quad (2.65)$$

A banda proporcional significa a gama de variação que o erro tem que varrer de modo a saturar a saída do controlador [6].

- **Desempenho do controlador**

A alteração dos parâmetros do controlador também causara uma alteração na resposta do sistema, como se pode ver figura 2-8 [30].

Como se pode observar na figura 2-8, se K_p , τ_i e τ_d forem iguais 1, a resposta do sistema é semelhante a de um sistema de primeira ordem, variando o valor dos parâmetros, a resposta do sistema altera-se, apresentando um comportamento em que o sistema não estabiliza tão rapidamente como quando todos os parâmetros são iguais a 1.

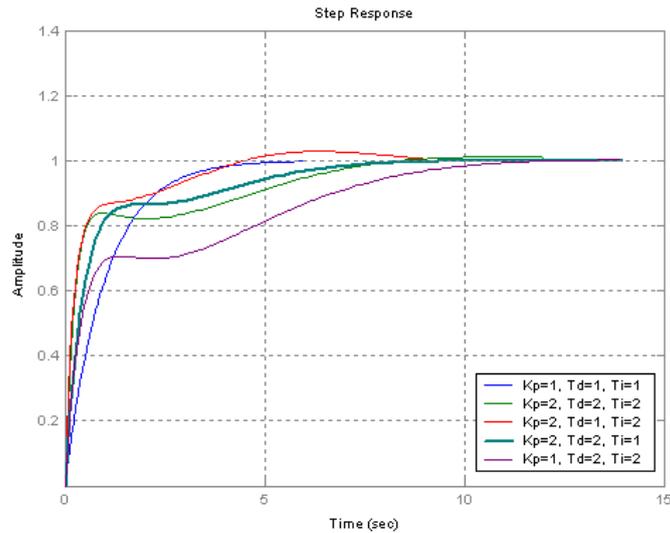


Figura 2-8 - Resposta de um controlador PID para diferentes parâmetros do controlador (entrada em degrau com sistema em malha fechada)

Idealmente, figura 2-9 [30], a resposta de um sistema a uma entrada em degrau unitário com um controlador PID, teria um tempo de subida, um percent overshoot e um erro em regime permanente iguais a 0, mas esta situação é impossível de se implementar fisicamente.

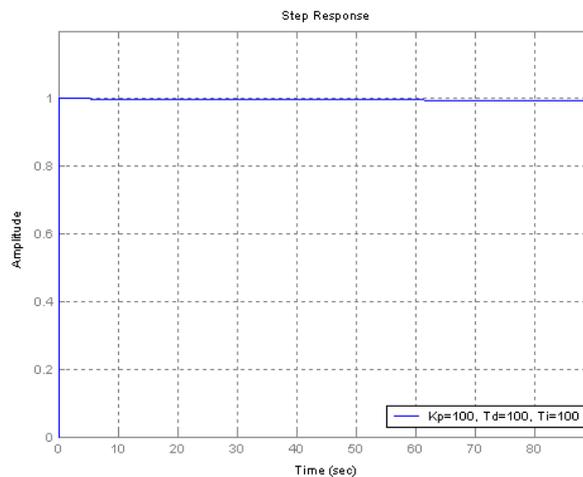


Figura 2-9 - Resposta ideal de um controlador PID

2.2.7. Controladores Digitais

Os controladores digitais operam com sinais discretos (descontínuos).

Nestes controladores, os sinais analógicos são convertidos em sinais digitais, através de conversores analógico-digitais, antes de serem processados no controlador. Depois de calculada a ação de controlo, um conversor digital-analógico converte o

sinal digital resultante em um sinal analógico, que é enviado para actuador. O sinal de controlo é então mantido constante até à próxima amostragem. As amostragens são feitas em instantes de tempo kT (T , período de amostragem), ou seja, é incluído um retentor de sinal de ordem zero no sistema.

- **Amostragem.**

A toda a implementação digital de uma acção de controlo estão ligadas operações de amostragem, descretização e quantificação.

Assim um sistema amostrado é um sistema em que uma ou mais variáveis só podem ser alteradas em instantes de tempo discretos, kT , onde T é o período de amostragem [6].

Num sistema de controlo a variável de comando deve ser mantida constante, entre duas amostras do sinal, isto consegue-se aplicando um retentor de ordem zero

Na figura 2-10 [30] está presente o diagrama de blocos de um sistema de controlo digital.

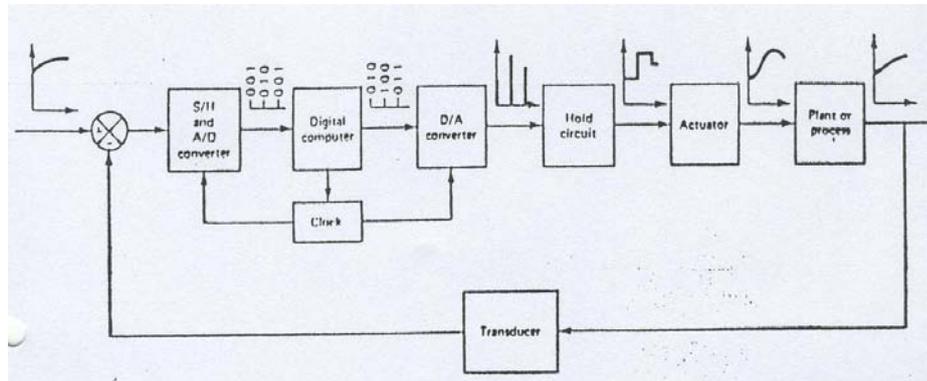


Figura 2-10 - Diagrama de blocos de um sistema de controlo digital

A escolha do período de amostragem adequado é muito importante, pois se o período de amostragem for muito alto, pode levar a existência de aliasing e conseqüente perda de informação importante do sistema, no caso extremo de o período de amostragem ser maior que o tempo de resposta do sistema, se uma perturbação afectar o sistema, esta pode desaparecer antes que o controlador possa actuar. Mas com um período de amostragem muito baixo pode levar a uma carga de trabalho computacional demasiado elevada, impedindo o sistema de controlo de efectuar outras tarefas.

O período de amostragem pode ser escolhido de diversas formas. A seguir são listados alguns dos critérios para a escolha do período de amostragem:

- O período de amostragem pode ser menor que 1/10 da maior constante de tempo do sistema
- teorema de Shannon em que a frequência de amostragem deve ser superior a duas vezes a frequência da onda sinusoidal
- 6 a 10 vezes a largura de banda do sinal
- 2 a 3 amostras por tempo de subida do sistema

Teorema da amostragem

O teorema da amostragem diz, que a frequência de amostragem deve ser maior que duas vezes a frequência máxima do sinal a amostrar.

$$w_s > 2w_{max} \quad (2.66)$$

Mas o teorema da amostragem implica que se o sinal contínuo possuir componentes de alta frequência, a frequência de amostragem terá de ser elevada, mesmo que o processo seja lento.

Nestes casos recomenda-se a filtragem do sinal antes da amostragem de maneira a eliminar componentes de alta frequência que não sejam muito importantes.

A escolha do período de amostragem também deverá levar em consideração a dinâmica do processo, a frequência do ruído existente no sinal, a razão sinal/ruído e as características do sistema de controlo.

O aliasing acontece quando a frequência de amostragem não é suficiente para amostrar o sinal sem que se perca informação significativa do sinal original, e fazendo com que este não possa ser reconstruído.

- **Reconstrução do sinal amostrado por retentor de ordem zero**

Existem diversas formas de proceder a reconstrução do sinal. Mas em controlo normalmente é usada a reconstrução por retentor de ordem zero.

Este tipo de reconstrução mantém o valor reconstruído constante até ao próximo tempo de amostragem, figura 2-11 [30].

O retentor de ordem zero pode ser aplicado a amostragens não periódicas, mas introduz um erro no caso de o sinal não ser contínuo à direita e constante ao durante o período de amostragem.

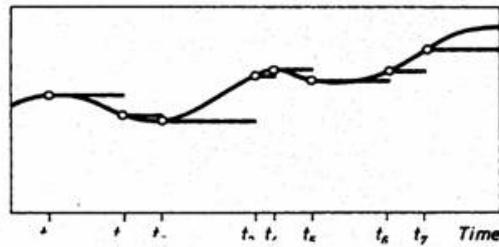


Figura 2-11 - Acção de um retentor de ordem zero

2.2.8. Controlador PID Digital

A robustez do controlador PID analógico, e a crescente utilização de sistemas digitais na industrial, fizeram com que fosse criada a versão digital do controlador PID.

O controlo PID digital tem várias versões: as duas principais, o algoritmo de posição e o de velocidade, as modificações destes duas e ainda o algoritmo generalizado.

- **O algoritmo de posição**

A maneira mais rápida de obter a versão digital do controlador PID é substituindo os termos integral e derivativo pelos seus equivalentes discretos, ou seja, aproxima-se o integral por uma soma e a derivada pela diferença dividida de 1ª ordem. Assim obtemos

$$C_n = C_{est} + K_p \left(E_n + \frac{T}{\tau_i} \sum_{k=1}^n E_k + \frac{\tau_d}{T} (E_n - E_{n-1}) \right) \quad (2.67)$$

onde que C_n e E_n são a acção de controlo e o erro no instante n e T é o período de amostragem.

Esta equação representa o algoritmo de posição do controlo PID, pois em cada instante é calculado o valor real (posição) do sinal de saída do controlador.

Quando ocorre o fenómeno de “wind-up” usando o algoritmo de posição, uma maneira simples para o eliminar consiste em definir uma gama de valores aceitáveis para a variável de saída, fora da qual, a acção de controlo do instante actual deve ser igual à acção de controlo o instante imediatamente antes, até deixar de haver saturação.

- **O algoritmo de velocidade**

O algoritmo de velocidade efectua o cálculo da variação do sinal de saída do controlador relativamente ao instante imediatamente anterior.

$$\Delta C_n = C_n - C_{n-1} = K_p \left((E_n - E_{n-1}) + \frac{T}{\tau_i} E_n + \frac{\tau_d}{T} (E_n - 2E_{n-1} + E_{n-2}) \right) \quad (2.68)$$

explicitando C_n obtêm-se

$$C_n = C_{n-1} + K_p \left((E_n - E_{n-1}) + \frac{T}{\tau_i} E_n + \frac{\tau_d}{T} (E_n - 2E_{n-1} + E_{n-2}) \right) \quad (2.69)$$

O algoritmo de velocidade possui algumas vantagens relativamente ao algoritmo de posição, tais como [6]:

- Não é necessário conhecer o valor da acção de controlo em estado estacionário, C_{est} ;
- Protege contra a possibilidade de saturação do controlador ('wind-up'); no algoritmo de posição o somatório do erro no termo integral poderá provocar a saturação do controlador. No algoritmo de velocidade a acção de controlo é alterada continuamente e, embora possa ocorrer a saturação, basta o erro mudar de sinal para a acção de controlo retornar para a gama de valores pretendida;
- Protege contra falhas computacionais, pois o sinal de saída é directamente enviado e retido pelo elemento final de controlo, evitando que ocorra perda total de controlo, se existir falha computacional.

- **Salto derivativo**

O salto derivativo ocorre quando existe uma variação no ponto estabelecido (variável de referencia), e tanto o algoritmo de posição como o de velocidade originarão uma mudança brusca no sinal de saída, devido ao termo derivativo.

Um dos métodos existentes para evitar este problema consiste em aplicar a acção derivativa à variável medida e não ao erro. Substituindo assim o erro pela diferença entre o ponto estabelecido e a variável medida

$$E = Y_{ref} - Y_m \quad (2.70)$$

Aplicando o descrito acima às equações do algoritmo de velocidade e do algoritmo de posição, obtêm-se as versões modificadas destes algoritmos.

- **Algoritmo de posição modificado**

A expressão correspondente ao algoritmo de posição modificado é a seguinte

$$C_n = C_{est} + K_p \left(E_n + \frac{T}{\tau_i} \sum_{k=1}^n E_k + \frac{\tau_d}{T} (Ym_{n-1} - Ym_n) \right) \quad (2.71)$$

- **Algoritmo de velocidade modificado**

A expressão correspondente ao algoritmo de velocidade modificado é a seguinte

$$C_n = C_{n-1} + K_p \left((Ym_{n-1} - Ym_n) + \frac{T}{\tau_i} E_n + \frac{\tau_d}{T} (-Ym_n - 2Ym_{n-1} + Ym_{n-2}) \right) \quad (2.72)$$

- **Algoritmo generalizado**

A equação seguinte representa o algoritmo generalizado de quarta ordem.

$$C_n = a_1 C_{n-1} + a_2 C_{n-2} + a_3 C_{n-3} + a_4 C_{n-4} + b_0 E_n + b_1 E_{n-1} + b_2 E_{n-2} + b_3 E_{n-3} \quad (2.73)$$

Com esta expressão é possível implementar diversas estratégias de algoritmo PID, incluindo o algoritmo de velocidade, com a escolha certa de parâmetros e com um rearranjo da equação matemática que a define.

2.2.9. Sintonização de Controladores

Se for possível obter o modelo matemático que descreve o sistema em estudo, então é possível obter o valor dos parâmetros do controlador, que satisfaçam as especificações desejadas para a resposta transitória em regime permanente do sistema em malha fechada. Mas se não for possível obter o modelo matemático do sistema,

então é necessário utilizar métodos experimentais para obter os parâmetros do controlador.

Ao processo de seleccionar os parâmetros adequados para responder aos requisitos pretendidos chama-se sintonização [30].

- **Métodos de Ziegler-Nichols**

Ziegler e Nichols criaram um conjunto de regras para sintonizar controladores PID, baseando-se em resultados experimentais. Estas regras, para determinar os valores de K_p , τ_i e τ_d , baseiam-se na resposta transitória do sistema a estudar.

- **Ziegler-Nichols em malha aberta**

Este método de sintonização, para ser aplicado, necessita que o sistema em malha aberta tenha como resposta a um degrau de amplitude A uma curva do tipo S (curva de reacção do processo). Esta curva pode ser obtida experimentalmente ou por simulação.

Neste método o sistema pode ser aproximado por um sistema de primeira ordem com atraso.

Na figura 2-12 [30] está presente o formato de uma curva do tipo S .

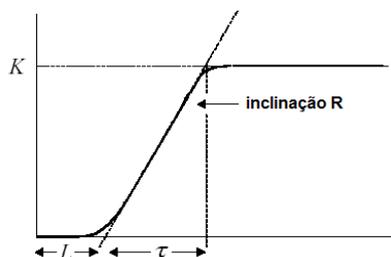


Figura 2-12 - Curva em s

A curva pode ser caracterizada pelos parâmetros L (atraso) e τ (constante de tempo). Estes parâmetros são obtidos traçando uma tangente ao ponto de inflexão da curva, e determinando o ponto de intersecção da tangente com o eixo do tempo.

Obtendo os valores de R e L , pode-se calcular os valores K_p , τ_i e τ_d através da tabela 2-2 [6].

Tabela 2-2 - Tabela para cálculo dos parâmetros do controlador PID pelo método de Ziegler-Nichols em malha aberta

	K_p	τ_i	τ_d
P	$\frac{1}{RL}$	-	-
PI	$\frac{0.9}{RL}$	$3L$	-
PID	$\frac{1.2}{RL}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

• **Ziegler-Nichols em malha fechada**

Neste método de sintonização deve-se colocar o sistema em malha fechada e usar apenas o controlador proporcional. Em seguida aplica-se variação em degrau na referência e vai-se aumentando o ganho do controlador até se obter na saída uma resposta oscilatória, figura 2-13 [30]. A frequência de oscilação é a frequência crítica, W_{co} . Pode-se calcular então os valores do ganho último e do período último.

$$\text{Ganho último: } K_u = \frac{1}{M} \tag{2.74}$$

$$\text{Período último: } P_u = \frac{2\pi}{W_{co}} \tag{2.75}$$

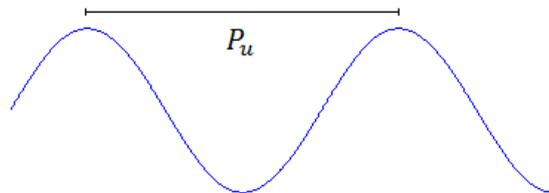


Figura 2-13 - oscilação constante com período P_u

Com os valores de K_u e P_u , já se pode obter os valores de K_p , τ_i e τ_d , através da tabela 2-3 [6].

Tabela 2-3 - Tabela para cálculo dos parâmetros do controlador PID pelo método de Ziegler-Nichols em malha fechada

	K_p	τ_i	τ_d
P	$\frac{K_u}{2}$	-	-
PI	$\frac{K_u}{2.2}$	$\frac{P_u}{1.2}$	-
PID	$\frac{K_u}{1.7}$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$

2.3. Sistemas

Um sistema pode ser definido como um conjunto de entidades, que de alguma maneira se relacionam entre si e que e que podem ser vistas como um só. [9]

Um sistema pode ser contínuo ou discreto. Um sistema contínuo é aquele cujas entradas e saídas são contínuas no tempo, enquanto um sistema discreto é aquele em que as entradas e saídas apenas são conhecidas para determinados instantes de tempo.

Os sistemas também podem ser divididos em lineares e não lineares. Um sistema diz-se linear se verificar simultaneamente as propriedades da aditividade e da homogeneidade.

Propriedade da aditividade: se à entrada x_1 corresponder a saída y_1 , e a entrada x_2 corresponder a saída y_2 , então à entrada $x_1 + x_2$ corresponde a saída $y_1 + y_2$.

Propriedade da homogeneidade: se à entrada x corresponder a saída y , então à entrada αx corresponde a saída αy .

Os sistemas podem ser ainda classificados como variantes ou invariantes no tempo. Um sistema invariante no tempo é aquele que independentemente do instante de tempo possui sempre a mesma resposta (para as mesmas condições), ou seja, se aplicarmos um deslocamento no tempo à entrada do sistema, então a saída do sistema também terá o mesmo deslocamento no tempo que a entrada.

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (2.76)$$

$$x(t - T) \rightarrow y(t - T) \quad (2.77)$$

Se um sistema além de invariante no tempo também for linear, então o sistema designam-se de LTI (Linear Time Invariant).

Um sistema pode ser ainda estável ou instável. Um sistema diz-se estável se a uma entrada limitada o sistema responder com uma saída limitada.

2.3.1. Modelização de um sistema

A dinâmica de um processo pode ser descrita de duas maneiras, através da sua função de transferência, ou, através de um conjunto de equações diferenciais (espaço de estados).

No método baseado em funções de transferência consideram-se as condições iniciais iguais a zero (condição que nem sempre é verdadeira). Este método também tem

os inconvenientes de se poder aplicar apenas a sistemas lineares e a sistemas SISO (Single Input Single Output) na maior parte dos casos. Além disso os parâmetros são invariantes no tempo e o tratamento do sistema deve ser efectuado no domínio das frequências.

Por outro lado o método por espaço de estados pode ser aplicado tanto a sistemas lineares como a não lineares, também pode ser aplicado a sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output). Além disso, neste método podem ser usados parâmetros variantes no tempo. Através deste método, o sistema é tratado no domínio dos tempos.

Neste trabalho é usada a modelização em espaço de estados por ser aquela que é mais indicada para se poder utilizar os métodos numéricos.

2.3.2. Modelização em espaço de estados

Uma noção importante neste tipo de modelização é a noção de estado. Sendo assim o estado de um sistema dinâmico é o número mais pequeno de variáveis (chamadas de variáveis de estado), de maneira que, com tendo conhecimento dessas variáveis e em conjunto com o conhecimento da entrada no processo para $t > 0$, se torne possível determinar integralmente o comportamento do sistema para qualquer instante de tempo maior que 0. [30] Sendo chamadas de variáveis de estado, de um sistema, ao menor conjunto de variáveis que define o estado de um sistema dinâmico.

Se forem necessárias n variáveis de estado para definir completamente o comportamento de um sistema, então essas n variáveis são as componentes do vector de estado do sistema.

Designa-se por espaço de estados ao espaço de dimensão n cujos eixos de coordenadas consistem no eixo x_1, x_2, \dots, x_n .

A primeira coisa a fazer para aplicar o espaço de estados a um sistema físico é a selecção das variáveis do sistema que representarão o seu estado.

Na escolha das variáveis de estado devemos optar sempre que possível, escolher as variáveis do sistema que estejam directamente relacionadas com variáveis físicas, aquelas que podem ser medidas ou observadas directamente.

A selecção das variáveis de estado tendo em conta as variáveis físicas, é efectuada com base nos elementos armazenadores de energia do sistema.

A seguir vem uma tabela com os elementos armazenadores de energia.

A tabela 2-4 [30], mostra uma lista dos elementos armazenadores de energia e da variável física a que correspondem.

Tabela 2-4 - Elementos armazenadores de energia

Elemento	Energia	Variável física
Condensador C	$\frac{Cv^2}{2}$	Tensão v
Indutância L	$\frac{Li^2}{2}$	Corrente i
Massa M	$\frac{Mv^2}{2}$	Velocidade de translação v
Momento de Inércia J	$\frac{J\omega^2}{2}$	Velocidade de rotação ω
Mola K	$\frac{Kx^2}{2}$	Deslocamento x
Capacidade (fluido) $C = \rho A$	$\frac{\rho Ah^2}{2}$	Altura h
Capacidade (térmica) C	$\frac{C\theta^2}{2}$	Temperatura τ

Para colocar o sistema na notação de espaço de estados, ele tem de ser colocado na seguinte forma

$$X' = AX + BU \quad (2.78)$$

$$Y = CX + DU \quad (2.79)$$

onde:

X' - Vector de estado do sistema. (vector de ordem n)

Y - Vector de saída do sistema. (vector de ordem m)

U - Vector de entrada do sistema. (vector de ordem r)

A - Matriz de estados do sistema. (matriz $n \times n$)

B - Matriz de entrada do sistema. (matriz $n \times r$)

C - Matriz de saída do sistema. (matriz $m \times n$)

D - Matriz de transmissão directa do sistema. (matriz $m \times n$)

Se o sistema for representado por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, então, a sua passagem para a notação em espaço de estados é facilmente conseguida.

No capítulo seguinte será apresentada a modelização em espaço de estado dos diversos sistemas a simular.

2.4. Java

Java é uma linguagem de programação orientada a objectos desenvolvida por uma equipa de programadores da empresa Sun Microsystems [35].

A linguagem Java, ao contrário de outras linguagens de programação, não é compilada para código nativo (código directamente utilizado pelo computador), mas sim para um “bytecode” (código intermédio), que é executado por uma máquina virtual, java virtual machine ou JVM.

Uma das maiores vantagens desta linguagem é a sua portabilidade, pois como os programas desenvolvidos em Java são executados sobre uma máquina virtual, estes programas podem ser executados em qualquer plataforma e sistema operativo, desde que estes tenham uma máquina virtual de Java instalada, tornando esta linguagem uma linguagem multi-plataforma.

Outra grande vantagem desta linguagem, para quem já tenha programado nas linguagens C, C++ e C#, é o facto de a sintaxe do Java ser muito similar à destas linguagens, principalmente à do C#.

O Java também possui um grande conjunto de bibliotecas de funções, que podem ser aplicadas às mais diversas aplicações, incluindo bibliotecas que facilitam a implementação de aplicações java em ambientes Web.

As vantagens referidas anteriormente foram algumas das razões que fizeram com que esta linguagem se tornasse uma das mais conhecidas e de maior sucesso no mundo, sendo aplicada tanto em aplicações executadas directamente num computador, como em aplicações que são executadas em páginas Web.

2.4.1. Java Applets

Um Applet é uma aplicação que é executada no contexto de outra aplicação.

Um java applet é uma aplicação Java que, para interpretar o seu “bytecode”, utiliza a máquina virtual de Java existente no computador ou no navegador de internet, em que está a ser usada. O Applet é normalmente usado quando se pretende adicionar

alguma funcionalidade a uma página Web, mas que não pode ser implementada em HTML [36].

O código do applet é inserido numa página Web, que exibe a interface do applet quando esta é carregada no navegador.

CAPÍTULO 3 Trabalho Realizado

Neste capítulo descreve-se o trabalho desenvolvido durante este projecto. É apresentada a modelização de cada sistema a simular, é descrita a interface do simulador e apresentados os algoritmos utilizados nos programas desenvolvidos.

3.1. Modelização de sistemas

Ao longo das próximas páginas vão ser apresentados os modelos usados neste trabalho e a respectiva modelização.

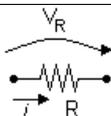
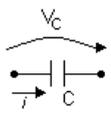
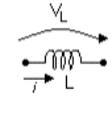
3.1.1. Modelização de sistemas eléctricos

O funcionamento dos sistemas eléctricos é regido pelas equações das leis de Kirchoff das malhas e dos nós [13].

A lei das malhas diz que a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de uma malha é zero. Enquanto que a lei dos nós diz que a soma algébrica das correntes eléctricas num nó é zero.

Para modelizar este tipo de sistema, também é importante, considerar as leis de funcionamento de cada elemento do sistema. Assim cada elemento pode ser representado por uma equação matemática, a saber:

Tabela 3-1 - Elementos de um circuito eléctrico

Elemento	Esquema	Equação
Resistência		$v_r = R \times i$
Capacidade		$v_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$ $i = C \frac{dv_c}{dt}$
Indutância		$v_L = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt$

Em que:

- V – Tensão
- i – Corrente eléctrica
- C – Capacitância
- L – Indutância

A tabela 3-2 [6] apresenta uma relação das variáveis do sistema eléctrico, das grandezas a que correspondem e unidades respectivas.

Tabela 3-2- variáveis do sistema eléctrico		
Símbolo	Grandeza	Unidade
V	Tensão	Volt (V)
I	Corrente	Ampere (A)
R	Resistência	Ohms (Ω)
C	Capacidade	Farad (F)
L	Indutância	Henry (H)

Na secção a seguir são apresentados os sistemas eléctricos que foram escolhidos para o simulador e a respectiva modelização.

a) Circuito RL serie de 1ª ordem

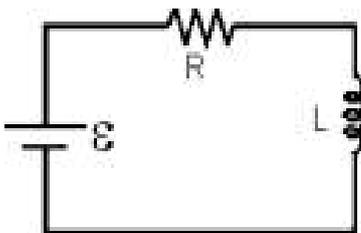


Figura 3-1 – Circuito RL

Neste circuito, representado na figura 3-1, existem apenas uma resistência e uma indutância ligadas em série, onde i_L representa a corrente que passa na indutância e que corresponde à corrente do circuito.

e representa a tensão da fonte do circuito.

Sabe-se que

$$v_r = R \times i \tag{3.1}$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} \tag{3.2}$$

Pela lei de Kirchoff das malhas

$$e = v_r + v_L \tag{3.3}$$

Substituindo os valores v_r e v_L na lei das malhas obtêm-se

$$e = Ri_L + L \frac{di_L}{dt} \Leftrightarrow \frac{e}{L} - \frac{Ri_L}{L} = \frac{di_L}{dt} \tag{3.4}$$

Colocando em ordem à derivada de maior grau obtêm-se

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{e}{L} - \frac{Ri_L}{L} \quad (3.5)$$

b) Circuito RLC com L e C em paralelo de 2ª ordem

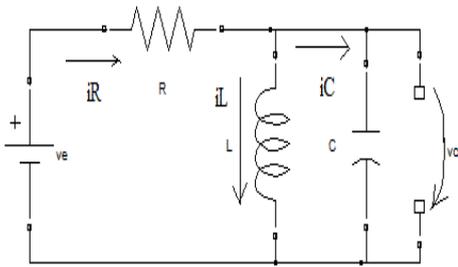


Figura 3-2 – Circuito RLC

O circuito da figura 3-2 é composto por uma resistência e um condensador e uma indutância ligados em paralelo, e ainda a fonte de tensão v_e . Como o condensador e a indutância estão em paralelo a sua tensão é mesma e é igual a tensão de saída v_0 .

Pela lei de Kirchoff dos nós e pela expressão da tensão na indutância obtêm-se

$$\begin{cases} i_R = i_L + i_C \\ v_0 = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_e - v_0}{R} = i_L + C \frac{dv_0}{dt} \\ v_0 = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv_0}{dt} = \frac{v_e - v_0}{RC} - \frac{i_L}{C} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{v_0}{L} \end{cases} \quad (3.6)$$

Colocando em notação espaço de estados,

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_0}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} v_e \quad (3.7)$$

Escolhendo como variáveis de saída v_0 e i_L

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} v_0 \\ i_L \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ i_L \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

c) Circuito RLC serie de 2ª ordem

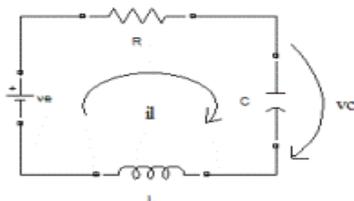


Figura 3-3 – Circuito RLC serie

O circuito da figura 3-3 é constituído pela fonte de tensão v_e e por uma resistência, um condensador e uma indutância em serie. Neste

caso a corrente i_L é a circuito, e v_C é a tensão no condensador e a tensão de corrente que percorre o saída.

Pela lei de Kirchoff das malhas, pelas expressões dos elementos do sistema, obtêm-se

$$v_e = v_R + v_C + v_L \quad (3.9)$$

$$v_R = Ri_L \quad (3.10)$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (3.11)$$

$$i_L = C \frac{dv_C}{dt} \quad (3.12)$$

Substituindo as expressões de v_R , v_C e v_L na lei das malhas, utilizando a expressão de i_L , e colocando ambas as expressões em ordem à derivada de maior grau obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} v_e = Ri_L + v_C + L \frac{di_L}{dt} \\ i_L = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{v_e}{L} - \frac{R}{L} i_L \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L \end{cases} \quad (3.13)$$

Colocando em notação espaço de estados,

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_e \quad (3.14)$$

Escolhendo como variáveis de saída v_C e i_L

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

d) Circuito RLC de 2ª ordem mais complexo

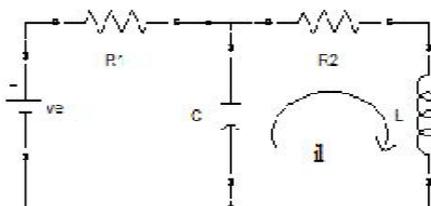


Figura 3-4 - Circuito RRLC

O circuito da figura 3-4 é composto por duas resistências, um condensador, uma indutância e a fonte de tensão u . A variável de saída é a corrente i_L .

Sabe-se que

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (3.15)$$

$$u_R = Ri \quad (3.16)$$

$$u_{R2} = i_L R_2 = u - u_C \quad (3.17)$$

Pela lei das malhas tem-se

$$u = u_{R1} + u_C \quad (3.18)$$

$$u_C = u_{R2} + u_L \quad (3.19)$$

Logo

$$u = u_{R1} + u_{R2} + u_L \quad (3.20)$$

Pela lei dos nós sabe-se que

$$i = i_C + i_L \quad (3.21)$$

Substituindo u_{R2} e u_L na equação (3.20)

$$u_C = u_{R2} + u_L = i_L R_2 + L \frac{di_L}{dt} \quad (3.22)$$

Efectuando as substituições dos valores i e i_C na lei dos nós

$$\frac{u-u_C}{R_1} = C \frac{du_C}{dt} + i_L \quad (3.23)$$

E substituindo o valor de u_C na equação (3.40) obtém-se

$$\frac{u-i_L R_2 + L \frac{di_L}{dt}}{R_1} = c \frac{d}{dt} \left(i_L R_2 + L \frac{di_L}{dt} \right) + i_L \quad (3.24)$$

Rearranjando a equação (3.32) chega-se a

$$R_1 CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} + (CR_1 R_2 + L) \frac{di_L}{dt} + (R_2 + R_1) i_L = u \quad (3.25)$$

Efectuando a seguinte mudança de variáveis para obter um sistema de equações de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1 = i_L \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \end{cases}$$

Colocando a equação em ordem a derivada de maior grau, obtém-se

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{u}{R_1 CL} - \frac{(CR_1 R_2 + L)}{R_1 CL} x_2 - \frac{(R_2 + R_1)}{R_1 CL} x_1 \quad (3.26)$$

No final obtém-se o sistema de equações seguinte.

$$\begin{cases} x_1 = i_L \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{u}{R_1 CL} - \frac{(CR_1 R_2 + L)}{R_1 CL} x_2 - \frac{(R_2 + R_1)}{R_1 CL} x_1 \end{cases} \quad (3.27)$$

Colocando em notação espaço de estados,

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(R_2+R_1)}{R_1CL} & -\frac{(CR_1R_2+L)}{R_1CL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1CL} \end{bmatrix} u \quad (3.28)$$

Considerando i_L como variável de saída

$$Y = CX + DU$$

$$Y = i_L = x_1$$

Logo

$$x_1 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.1.2. Modelização de sistemas hidráulicos

O funcionamento dos sistemas hidráulicos é regido pelo princípio da Lei de conservação da massa. Para estes sistemas a lei da conservação da massa diz que o que entra no sistema é igual ao que sai mais o que fica acumulado.

$$O \text{ que entra} = o \text{ que sai} + o \text{ que acumula}$$

Na figura 3-5 está ilustrado um sistema hidráulico

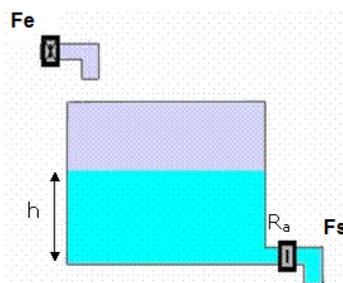


Figura 3-5 - Sistema Hidráulico

A seguir estão as expressões que definem o comportamento do sistema.

$$Fs = \frac{h}{R} \quad (3.30)$$

$$V = A \times h \quad (3.31)$$

$$Fe = Fs + A \frac{dh}{dt} \quad (3.32)$$

A tabela 3-3 [6] mostra uma relação das variáveis do sistema hidráulico, das grandezas a que correspondem e unidades respectivas.

Tabela 3-3 - variáveis do sistema hidráulico

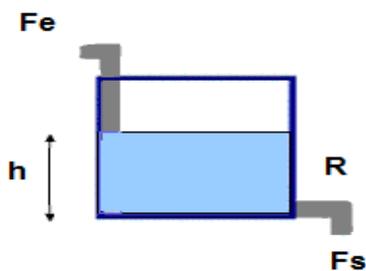
Símbolo	Grandeza	Unidade
h	Nível	m
V	Volume	m ³
A	Área	m ²
R	Resistência da válvula	m/(kg/s)
F	Caudal mássico	kg/s

F_s – Caudal de saída.

F_e – Caudal de entrada.

Nas alíneas seguintes são apresentados os sistemas hidráulicos escolhidos para o simulador e respectiva modelização.

a) Sistema hidráulico de 1ª ordem (um único tanque)



Este sistema é semelhante ao utilizado anteriormente para exemplificar as expressões que regem este tipo de sistemas, ou seja, um único tanque com uma entrada e uma saída.

Figura 3-6 - Sistema hidráulico de 1ª ordem

Assim neste sistema tem-se um único tanque com uma entrada e uma saída.

$$\text{Entra} = \text{Sai} + \text{Acumula}$$

Logo

$$F_e = F_s + \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3.33)$$

$$V = A \times h \quad (3.34)$$

Fazendo a substituição da variação do volume ao longo do tempo, pela derivada do volume em ordem ao tempo obtêm-se

$$F_e = F_s + \frac{dV}{dt} \quad (3.35)$$

como

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(A \times h)}{dt} = A \frac{dh}{dt} \quad (3.36)$$

e

$$Fs = \frac{h}{R} \quad (3.37)$$

Substituindo na equação diferencial (3.35) obtém-se

$$Fe = \frac{h}{R} + A \frac{dh}{dt}. \quad (3.38)$$

Colocando a equação em ordem à derivada de maior grau, obtém-se

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Fe}{A} - \frac{h}{RA} \quad (3.39)$$

b) Sistema hidráulico de 2ª ordem (Dois tanques com interação)

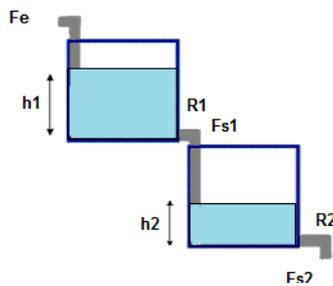


Figura 3-7 - Sistema hidráulico de 2ª ordem

Neste sistema existem dois tanques, em que a saída do primeiro tanque é a entrada do segundo tanque, como mostra a figura 3-7.

Tanque 1:

$$\text{Entra} = \text{Sai} + \text{Acumula}$$

Para o tanque 1 tem-se

$$Fe1 = Fs1 + \frac{\Delta V1}{\Delta t} \quad (3.40)$$

Sabe-se que

$$Fs1 = \frac{h1}{R1} \quad (3.41)$$

e

$$V1 = A1 \times h1 \quad (3.42)$$

e

$$\frac{dV1}{dt} = A1 \frac{dh1}{dt} \quad (3.43)$$

Então a equação diferencial que descreve o tanque 1 é

$$Fe = Fs1 + A1 \frac{dh1}{dt} \quad (3.44)$$

Substituindo $Fs1$ na equação (3.44) obtém-se

$$Fe = \frac{h1}{R1} + A1 \frac{dh1}{dt} \quad (3.45)$$

Tanque 2:

$$\text{Entra} = \text{Sai} + \text{Acumula}$$

Então para o tanque 2 tem-se

$$Fe2 = Fs2 + \frac{\Delta V2}{\Delta t} \quad (3.46)$$

Pela figura 3-7 tem-se que

$$Fe2 = Fs1 \quad (3.47)$$

e sabe-se que

$$Fs2 = \frac{h2}{R2} \quad (3.48)$$

,

$$V2 = A2 \times h2 \quad (3.49)$$

e

$$\frac{dV2}{dt} = A2 \frac{dh2}{dt} \quad (3.50)$$

Então a equação diferencial para o segundo tanque fica

$$Fe2 = Fs2 + A2 \frac{dh2}{dt} \quad (3.51)$$

Substituindo $Fs2$ e $Fe2$ na equação diferencial (3.51) obtêm-se

$$\frac{h1}{R1} = \frac{h2}{R2} + A2 \frac{dh2}{dt} \quad (3.52)$$

Colocando ambas as equações diferenciais em ordem a respectiva derivada de maior grau obtêm-se

$$\begin{cases} \frac{dh1}{dt} = \frac{Fe}{A1} - \frac{h1}{R1A1} \\ \frac{dh2}{dt} = \frac{h1}{R1A2} - \frac{h2}{R2A2} \end{cases} \quad (3.53)$$

Colocando em notação espaço de estados,

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dh1}{dt} \\ \frac{dh2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R1A1} & 0 \\ \frac{1}{R1A2} & -\frac{1}{R2A2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A1} \\ 0 \end{bmatrix} Fe \quad (3.54)$$

Escolhendo como variáveis a controlar as duas alturas (níveis) obtêm-se

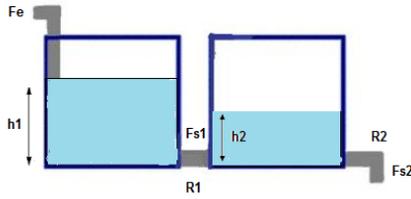
$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

c) Sistema hidráulico de 2ª ordem (Dois tanques em série com interação)



Neste sistema existem dois tanques, em que a saída do primeiro tanque é a entrada do segundo tanque, como mostra a figura 3-8.

Figura 3-8 - Sistema hidráulico de 2ª ordem

Para o tanque 1 tem-se

$$Fe1 = Fs1 + \frac{\Delta V1}{\Delta t} \quad (3.56)$$

Sabe-se que

$$Fs1 = \frac{h1-h2}{R1} \quad (3.57)$$

$$V1 = A1 \times h1 \quad (3.58)$$

$$\frac{dV1}{dt} = A1 \frac{dh1}{dt} \quad (3.59)$$

Sendo a equação diferencial para o tanque 1 a seguinte

$$Fe = \frac{h1-h2}{R1} + A1 \frac{dh1}{dt} \quad (3.60)$$

Para o tanque 2 tem-se

$$Fe2 = Fs2 + \frac{\Delta V2}{\Delta t} \quad (3.61)$$

Pela figura 3-8 tem-se que

$$Fe2 = Fs1 \quad (3.62)$$

e sabe-se que

$$Fs2 = \frac{h2}{R2} \quad (3.63)$$

$$V2 = A2 \times h2 \quad (3.64)$$

$$\frac{dV2}{dt} = A2 \frac{dh2}{dt} \quad (3.65)$$

Sendo a equação diferencial para o segundo tanque a seguinte

$$Fe2 = Fs2 + A2 \frac{dh2}{dt} \quad (3.66)$$

Substituindo Fs2 na equação diferencial (3.66) obtém-se

$$\frac{h1-h2}{R1} = \frac{h2}{R2} + A2 \frac{dh2}{dt} \quad (3.67)$$

Colocando ambas as equações diferenciais em ordem a respectiva derivada de maior grau obtém-se

$$\begin{cases} Fe = \frac{h1-h2}{R1} + A1 \frac{dh1}{dt} \\ \frac{h1-h2}{R1} = \frac{h2}{R2} + A2 \frac{dh2}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dh1}{dt} = \frac{Fe}{A1} - \frac{h1}{A1R1} + \frac{h2}{A1R1} \\ \frac{dh2}{dt} = \frac{h1}{R1A2} - \frac{h2}{R1A2} - \frac{h2}{R2A2} \end{cases} \quad (3.68)$$

Colocando em notação espaço de estados,

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dh1}{dt} \\ \frac{dh2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ R1A1 & A1R1 \\ 1 & -1 \\ R1A2 & R2A2 - R2A2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} Fe \quad (3.69)$$

$$Y = CX + DU$$

Escolhendo como variáveis a controlar as duas alturas (níveis) obtém-se

$$Y = \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

d) Sistema hidráulico de 3ª ordem (três tanques em série com interação)

Este sistema é semelhante ao da alínea c) mas com três tanques, onde a saída do segundo tanque é a entrada do terceiro, como mostra a figura 3-9.

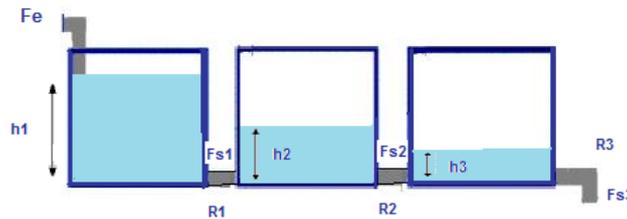


Figura 3-9 - Sistema hidráulico de 3ª ordem

Para o tanque 1 tem-se

$$Fe1 = Fs1 + \frac{\Delta V1}{\Delta t} \quad (3.71)$$

Sabe-se que

$$Fs1 = \frac{h1-h2}{R1} \quad (3.72)$$

e

$$V1 = A1 \times h1 \quad (3.73)$$

e

$$\frac{dV1}{dt} = A1 \frac{dh1}{dt} \quad (3.74)$$

Sendo a equação diferencial a o primeiro tanque a seguinte

$$Fe = \frac{h1-h2}{R1} + A1 \frac{dh1}{dt} \quad (3.75)$$

Para o tanque 2 tem-se

$$F_{e2} = F_{s2} + \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \quad (3.76)$$

Pela figura 3-9 tem-se que

$$F_{e2} = F_{s1} \quad (3.77)$$

E sabe-se que

$$F_{s2} = \frac{h_2 - h_3}{R_2} \quad (3.78)$$

$$V_2 = A_2 \times h_2 \quad (3.79)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (3.80)$$

Sendo a equação diferencial para o segundo tanque a seguinte

$$F_{e2} = F_{s2} + A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (3.81)$$

Substituindo F_{s2} na equação diferencial (3.81) obtém-se

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = \frac{h_2 - h_3}{R_2} + A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (3.82)$$

Para o tanque 3 tem-se

$$F_{e3} = F_{s3} + \frac{\Delta V_3}{\Delta t} \quad (3.83)$$

Pela figura 3-12 vê-se que

$$F_{e3} = F_{s2} \quad (3.84)$$

E sabe-se que

$$F_{s3} = \frac{h_3}{R_3} \quad (3.85)$$

$$V_3 = A_3 \times h_3 \quad (3.86)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = A_3 \frac{dh_3}{dt} \quad (3.87)$$

Sendo a equação diferencial para o terceiro tanque a seguinte

$$F_{e3} = F_{s3} + A_3 \frac{dh_3}{dt} \quad (3.88)$$

Substituindo F_{s3} na equação diferencial (3.88) obtém-se

$$\frac{h_2 - h_3}{R_2} = \frac{h_3}{R_3} + A_3 \frac{dh_3}{dt} \quad (3.89)$$

Colocando as três equações diferenciais em ordem a respectiva derivada de maior grau obtém-se

$$\begin{cases} F_e = \frac{h_1 - h_2}{R_1} + A_1 \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{h_1 - h_2}{R_1} = \frac{h_2 - h_3}{R_2} + A_2 \frac{dh_2}{dt} \\ \frac{h_2 - h_3}{R_2} = \frac{h_3}{R_3} + A_3 \frac{dh_3}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = \frac{F_e}{A_1} - \frac{h_1}{A_1 R_1} + \frac{h_2}{A_1 R_1} \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1 A_2} - \frac{h_2}{R_1 A_2} - \frac{h_2}{R_2 A_2} + \frac{h_3}{R_2 A_2} \\ \frac{dh_3}{dt} = \frac{h_2}{R_2 A_3} - \frac{h_3}{R_2 A_3} - \frac{h_3}{R_3 A_3} \end{cases} \quad (3.90)$$

Colocando em notação espaço de estados,

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dh1}{dt} \\ \frac{dh2}{dt} \\ \frac{dh3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A1R1} & \frac{1}{A1R1} & 0 \\ \frac{1}{R1A2} & -\frac{1}{R1A2} - \frac{1}{R2A2} & \frac{1}{R2A2} \\ 0 & \frac{1}{R2A3} & -\frac{1}{R2A3} - \frac{1}{R3A3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \\ h3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Fe \quad (3.91)$$

$$Y = CX + DU$$

Escolhendo como variáveis a controlar as três alturas (níveis) obtêm-se

$$Y = \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \\ h3 \end{bmatrix}$$

Logo

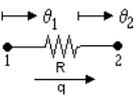
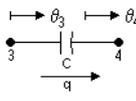
$$\begin{bmatrix} h1 \\ h2 \\ h3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \\ h3 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

3.1.3. Modelização de sistemas térmicos

Os sistemas térmicos são regidos pela lei da conservação da energia. Assim a lei diz que a quantidade de calor fornecida ao sistema é igual à soma da quantidade de calor que se perde mais a quantidade de calor armazenada.

Os sistemas térmicos têm como componentes básicos a capacidade térmica e a resistência térmica. A capacidade térmica representa a capacidade que um corpo tem para armazenar calor. A resistência térmica tem a ver com a resistência que um corpo oferece à passagem de calor.

Como nos sistemas eléctricos, é importante ter as leis de funcionamento para cada elemento do sistema. Assim na tabela 3-4 estão representados os elementos deste tipo de sistemas com os respectivos esquemas e equações.

Tabela 3-4 - Elementos de um sistema térmico		
Elemento	Esquema	Equação
Resistência térmica		$q = \frac{1}{R} (T_{font\ quente} - T_{font\ fria})$
Capacidade térmica		$q = C \frac{dT}{dt}$

Também é importante referir o fluxo de calor, que é a quantidade de calor que atravessa que atravessa uma superfície por unidade de tempo e cuja expressão é

$$q = FCpT \quad (3.93)$$

A tabela 3-5 [6] mostra uma relação das variáveis do sistema térmico, das grandezas a que correspondem e unidades.

Tabela 3-5 - Variáveis do sistema térmico

Símbolo	Grandeza	Unidade
T	Temperatura	°C
Q	Fluxos de Calor	J/s
Cp	Capacidade Calorífica	J/°C.kg
C	Capacidade Térmica	J/°C
R	Resistência Térmica	°C/(J/s)
F	Caudal mássico	kg/s

Nas alíneas seguintes são apresentados os sistemas térmicos escolhidos para o simulador e a respectiva modelização.

a) Sistema térmico de 1ª ordem (estufa)

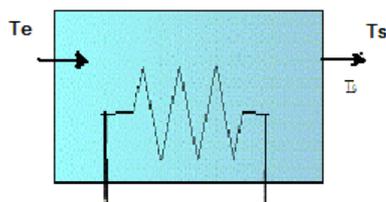


Figura 3-10 – Sistema térmico de 1ª ordem

Para este sistema, representado na figura 3-10, tem-se que

Calor fornecido pela resistência +fluxo do calor da corrente de entrada = Fluxo da corrente de saída + Fluxo que acumula.

Logo

$$P + q_e = q_s + q_{ac} \quad (3.94)$$

$$J/h + J/h = J/h + J/h$$

Sabe-se que o fluxo de calor é igual a $q = C_p QT$, onde Q representa o caudal mássico.

Assim o fluxo de calor de entrada é igual a

$$q_e = C_p QT_e. \quad (3.95)$$

E o fluxo de calor de saída será igual a

$$q_s = C_p Q T_s \quad (3.96)$$

Também se conhece a expressão do fluxo acumulado que é

$$q_{ac} = C_T \frac{dT}{dt} \quad (3.97)$$

$$\frac{J}{h} = \frac{J}{^\circ C} \frac{^\circ C}{J}$$

Assim substituindo os valores de q_e , q_s e q_{ac} na equação (3.94) obtém-se

$$P + C_p Q T_e = C_p Q T_s + C_T \frac{dT_s}{dt} \quad (3.98)$$

Resolvendo a equação em ordem a derivada de maior ordem obtém-se a equação diferencial que rege o funcionamento deste sistema.

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{P}{C_T} + \frac{C_p Q T_e}{C_T} - \frac{C_p Q T_s}{C_T} \quad (3.99)$$

b) Sistema térmico de 1ª ordem

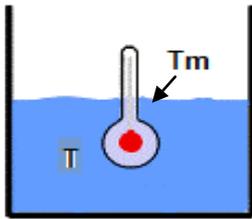


Figura 3-11 - Sistema térmico de 1ª ordem

Para este sistema pretende-se modelizar o funcionamento de um termómetro, sendo mergulhado num líquido, figura 3-11.

T indica a temperatura do líquido do recipiente, e T_m é a temperatura do mercúrio do termómetro, cuja variação se pretende modelizar.

Pela lei da conservação da energia tem-se

$$q_e = 0 + q_{ac} \quad (3.100)$$

Sendo

$$q_{ac} = C_{Tm} \frac{dT_m}{dt} \quad (3.101)$$

Onde T_m é a temperatura medida pelo termómetro.

Para este caso o q_e está relacionado com calor que é transferido do líquido para o termómetro. Logo

$$q_e = \frac{1}{R_T} (T - T_m) \quad (3.102)$$

Substituindo os valores de q_e e q_{ac} na equação (3.100), obtém-se

$$\frac{1}{R_T} (T - T_m) = C_{Tm} \frac{dT_m}{dt} \quad (3.103)$$

Resolvendo em ordem à derivada de maior grau, tem-se equação diferencial (3.104), que rege o funcionamento deste sistema.

$$\frac{dT_m}{dt} = \frac{T}{R_T C_{T_m}} - \frac{T_m}{R_T C_{T_m}} \quad (3.104)$$

c) Sistema térmico de 2ª ordem

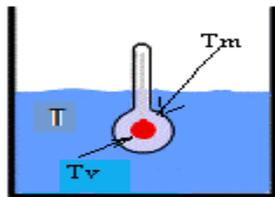


Figura 3-12 - Sistema térmico de 2ª ordem

Neste sistema, representado na figura 3-12, além de serem consideradas as temperaturas do líquido (T), e do termómetro (T_m), também se tem conta a temperatura do vidro (T_V). Sabe-se que parte do calor transferido fica retido nas paredes do termómetro, existindo aí acumulação de calor.

Considerando as trocas de calor entre o líquido e o vidro

$$q_e = q_s + q_{ac} \quad (3.105)$$

Onde

$$q_e = \frac{1}{R_{T_{VV}}} (T - T_V), \quad (3.106)$$

$$q_s = \frac{1}{R_{T_{Vm}}} (T_V - T_m) \quad (3.107)$$

e

$$q_{ac} = C_{T_V} \frac{dT_V}{dt} \quad (3.108)$$

Substituindo estas expressões na equação (3.105), obtém-se

$$\frac{1}{R_{T_{VV}}} (T - T_V) = \frac{1}{R_{T_{Vm}}} (T_V - T_m) + C_{T_V} \frac{dT_V}{dt} \quad (3.109)$$

Considerando agora as trocas de calor entre o vidro e o mercúrio

$$q_e = q_s + q_{ac} \quad (3.110)$$

Onde

$$q_e = \frac{1}{R_{T_{Vm}}} (T_V - T_m), \quad (3.111)$$

$$q_s = 0 \quad (3.112)$$

e

$$q_{ac} = C_{T_m} \frac{dT_m}{dt} \quad (3.113)$$

Substituindo estas expressões na equação (3.110), obtém-se

$$\frac{1}{R_{T_{Vm}}} (T_V - T_m) = 0 + C_{T_m} \frac{dT_m}{dt} \quad (3.114)$$

Colocando cada uma das equações diferenciais em ordem à respectiva derivada de maior grau, obtém-se o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} \frac{dT_V}{dt} = \frac{1}{R_{T_V} C_{T_V}} T + \frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_V}} T_m - \left(\frac{1}{R_{T_V} C_{T_V}} + \frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_V}} \right) T_V \\ \frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_m}} T_V - \frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_m}} T_m \end{cases} \quad (3.115)$$

Colocando em notação espaço de estados,

$$\begin{aligned} X' &= AX + BU \\ \begin{bmatrix} \frac{dT_V}{dt} \\ \frac{dT_m}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_{T_V} C_{T_V}} + \frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_V}} \right) & \frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_V}} \\ \frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_m}} & -\frac{1}{R_{T_{V_m}} C_{T_m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_V \\ T_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{T_V} C_{T_V}} \\ 0 \end{bmatrix} T \end{aligned} \quad (3.116)$$

Escolhendo como variáveis de saída as temperaturas T_m e T_V

$$\begin{aligned} Y &= CX + DU \\ Y &= \begin{bmatrix} T_V \\ T_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} T_V \\ T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_V \\ T_m \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

3.1.4. Modelização de sistemas mecânicos

O funcionamento dos sistemas mecânicos é regido pela primeira lei de Newton, que o somatório de todas as forças que actuam sobre um corpo é igual à sua massa (M) multiplicada pela aceleração (a).

$$\sum F = M \times a \quad (3.118)$$

Os sistemas mecânicos podem ser divididos em duas categorias, sistemas mecânicos de translação e sistemas mecânicos de rotação.

3.1.4.1. Sistemas mecânicos de translação

Neste tipo de sistemas consideram-se como componentes básicos a massa (inércia), a mola (elasticidade) e amortecedor (atrito viscoso).

Na tabela 3-6 estão representados os elementos dos sistemas mecânicos de translação com o respectivo esquema e expressão para o cálculo da força correspondente.

Tabela 3-6 - Elementos de um sistema mecânico de translação

Elemento	Esquema	Equação
Massa		$F_M = M \frac{d^2x}{dt^2}$
Mola		$F_K = K(x_{inicial} - x_{final})$
Amortecedor (atrito viscoso)		$F_B = B(v_{inicial} - v_{final})$ $= B(x'_{inicial} - x'_{final})$

A tabela 3-7 [6] mostra uma relação das variáveis dos sistemas mecânicos, das grandezas a que correspondem e suas unidades.

Tabela 3-7 - Variáveis do sistema mecânico de translação

Símbolo	Grandeza	Unidade
F	Força	Newton (N)
x	Deslocamento	Metro (m)
v	Velocidade	m/s
a	Aceleração	m/s ²
M	Massa	Kilograma (kg)
K	Coefficiente de elasticidade	N/m
B	Coefficiente de amortecimento	N/(m/s)

3.1.4.2. Sistemas mecânicos de rotação

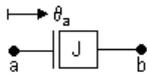
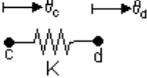
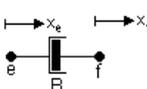
Para estes sistemas a lei de Newton diz que o somatório de todos os binários que actuam num corpo é zero.

Nestes sistemas as grandezas físicas intervenientes são o deslocamento angular, a velocidade angular, a aceleração angular e o binário.

Os componentes básicos destes sistemas são o momento de inércia, a mola (elasticidade) e amortecedor (atrito viscoso).

Na tabela 3-8 estão representados os elementos dos sistemas mecânicos de rotação com o respectivo esquema e expressão para o cálculo da força correspondente.

Tabela 3-8 - Elementos de um sistema mecânico de rotação

Elemento	Esquema	Equação
Momento de inércia		$T_J = J \frac{d^2 \theta}{dt^2}$
Mola (elasticidade)		$T_K = K(\theta_{inicial} - \theta_{final})$
Amortecedor (atrito viscoso)		$T_B = B(\omega_{inicial} - \omega_{final})$ $= B(\theta'_{inicial} - \theta'_{final})$

A tabela 3-9 [6] mostra uma relação das variáveis dos sistemas mecânicos de rotação, das grandezas a que correspondem e suas unidades.

Tabela 3-9 - Variáveis do sistema mecânico de rotação

Símbolo	Grandeza	Unidade
T	Binário	N/m
θ	Ângulo	rad
ω	Velocidade angular	rad/s
α	Aceleração angular	rad/s ²
J	Momento de inércia	kgm ²
K	Coefficiente de elasticidade	Nm/rad
B	Coefficiente de amortecimento	Nm/(rad/s)

Nas alíneas seguintes são apresentados os sistemas mecânicos escolhidos para o simulador e a respectiva modelização.

a) Movimento rectilíneo sem atrito



Este sistema, representado na figura 3-13, consiste num corpo de massa M onde é aplicada uma força F

Figura 3-13 - Movimento rectilíneo

Pela lei de Newton sabe-se que

$$\sum F = m \times a, \tag{3.119}$$

como só existe uma força aplicada

$$F = M \times a, \quad (3.120)$$

e

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.121)$$

Assim equação que descreve o comportamento do sistema é

$$F = M \times \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.122)$$

Colocando a equação em ordem a derivada de maior grau

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{M}. \quad (3.123)$$

Efectuando as seguintes mudanças de variável,

$$x_1 = x, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Obtém-se um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

$$\begin{cases} x_1 = x \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{F}{M} \end{cases} \quad (3.124)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F \quad (3.125)$$

Escolhendo como variáveis de saída o deslocamento (x_1) e a velocidade (x_2)

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

b) Movimento rectilíneo com atrito



Figura 3-14 - Movimento rectilíneo com atrito

O sistema representado na figura 3-14 consiste num corpo de massa M onde é aplicada uma força F e considera-se a força de atrito Fa .

Pela lei de Newton sabe-se que

$$\sum F = m \times a, \quad (3.127)$$

como existem duas forças aplicadas

$$F + Fa = M \times a, \quad (3.128)$$

em que

$$Fa = B \times v = B \frac{dx}{dt} \quad (3.129)$$

e

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.130)$$

Assim equação que descreve o comportamento do sistema é

$$F - B \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.131)$$

Colocando a equação em ordem a derivada de maior grau

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{M} - \frac{B}{M} \frac{dx}{dt}. \quad (3.132)$$

Efectuando as seguintes mudanças de variável,

$$x_1 = x, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

A equação fica com a seguinte forma

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{B}{M} x_2 \quad (3.133)$$

Sendo o sistema de equações diferenciais de primeira ordem o seguinte.

$$\begin{cases} x_1 = x \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{B}{M} x_2 \end{cases} \quad (3.134)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F \quad (3.135)$$

Escolhendo como variáveis de saída o deslocamento (x_1) e a velocidade (x_2)

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

c) Força elástica, uma única mola

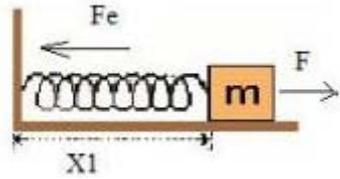


Figura 3-15 - Força elástica, uma mola

Neste caso um corpo de massa M está preso a uma mola, figura 3-15, existem então três forças aplicadas a força F , a força elástica Fe e a força de atrito Fa .

Pela lei de Newton sabe-se que

$$\sum F = m \times a, \quad (3.137)$$

como existem três forças aplicadas

$$F - Fa - Fe = M \times a, \quad (3.138)$$

Onde

$$Fa = B \times v = B \frac{dx}{dt}, \quad (3.139)$$

$$Fe = kx \quad (3.140)$$

e

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.141)$$

Assim equação que descreve o comportamento do sistema é

$$F - B \frac{dx}{dt} - kx = M \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.142)$$

Resolvendo a equação em ordem a derivada de maior grau obtêm-se

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{B}{M} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{M}x + \frac{1}{M}F. \quad (3.143)$$

Utilizando as seguintes mudanças de variável

$$x_1 = x, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Obtêm-se o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1 = x \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{B}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 \end{cases} \quad (3.144)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F \quad (3.145)$$

Escolhendo como variável de saída o deslocamento x_1 .

$$Y = CX + DU$$

$$Y = x_1$$

Logo

$$x_1 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

d) Força elástica, duas molas

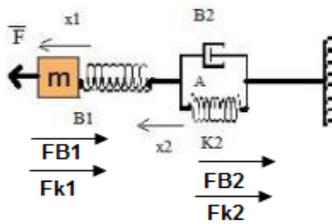


Figura 3-16 - Força elástica duas molas

Neste sistema, figura 3-16, existem duas molas, mas apenas uma delas está ligada ao corpo de massa m . Então é necessário designar dois pontos, M e A, onde as forças vão ser aplicadas.

Pela lei de Newton sabe-se que

$$\sum F = m \times a. \quad (3.147)$$

A força de atrito e força elástica são iguais a

$$F_{Bn} = Bn \times v = Bn \frac{dx_n}{dt}, \quad (3.148)$$

$$F_{k2} = k_2 x_1, \quad (3.149)$$

$$F_{k1} = k_1(x_1 - x_2), \quad (3.150)$$

onde $n=1,2,\dots$

No ponto M estão aplicadas a força F , a força de atrito F_{B1} e a força elástica F_{k1} .

Logo a equação para o ponto M é

$$F - F_{B1} - F_{k1} = M \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (3.151)$$

Substituindo F_{B1} e F_{k1} na equação (3.151), pelas suas expressões, obtém-se

$$F - B_1 \frac{dx_1}{dt} - k_1(x_1 - x_2) = M \frac{d^2 x_1}{dt^2}. \quad (3.152)$$

Colocando a derivada de maior ordem em evidência,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{B_1}{M} \frac{dx_1}{dt} - \frac{k_1}{M} (x_1 - x_2) + \frac{F}{M}. \quad (3.153)$$

No ponto A são aplicadas a força elástica F_{k1} , a força elástica F_{k2} e a força de atrito F_{B2} . Logo para o ponto A tem-se a equação

$$F_{k1} - F_{k2} - F_{B2} = 0. \quad (3.154)$$

Substituindo F_{k1} , F_{k2} e F_{B2} , pelas suas expressões na equação (3.154), obtém-se

$$k_1(x_1 - x_2) = k_2x_2 + B_2 \frac{dx_2}{dt} \quad (3.155)$$

Resolvendo em ordem à derivada de maior grau

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k_1x_1}{B_2} - \frac{k_1x_2}{B_2} - \frac{k_2x_2}{B_2}. \quad (3.156)$$

Para converter as equações diferenciais (3.153) e (3.156), em um sistema de equações de primeira ordem é necessário efectuar as seguintes mudanças de variável.

$$z_1 = x_1, \quad z_3 = x_2, \quad \frac{dz_1}{dt} = z_2$$

Assim, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} \frac{dz_2}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{B_1}{M}z_2 - \frac{k_1}{M}z_1 + \frac{k_1}{M}z_3 \\ \frac{dz_3}{dt} = \frac{k_1}{B_2}z_1 - \frac{k_1}{B_2}z_3 - \frac{k_2}{B_2}z_3 \end{cases} \quad (3.157)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \\ \frac{dz_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{B_1}{M} & \frac{k_1}{M} \\ \frac{k_1}{B_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.158)$$

Escolhendo como variáveis de saída o deslocamento x_1 e o deslocamento x_2 .

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

e) Plano inclinado

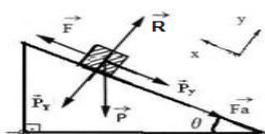


Figura 3-17 - Plano inclinado

Neste caso, figura 3-17, existe um corpo de massa M a subir um plano inclinado com um determinado ângulo θ . Este corpo está sujeito à força F , à força gravítica P , à força de atrito Fa e a força de reacção R .

Pela lei de Newton sabe-se que

$$\sum F = m \times a, \quad (3.160)$$

Para este sistema consideram-se a projecção das forças aplicadas segundo o eixo dos x e segundo o eixo dos y .

Segundo o eixo dos x estão aplicadas ao corpo a força F a força de atrito F_a e a força gravítica segundo x P_x .

Pela lei de Newton.

$$F - F_a - P_x = M \times a \quad (3.161)$$

Onde

$$F_a = B \times v = B \frac{dx}{dt}, \quad (3.162)$$

$$P_x = Mg \sin \theta \quad (3.163)$$

e

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.164)$$

Substituindo as equações (3.162), (3.163) e (3.164) em (3.161) tem-se

$$F - B \frac{dx}{dt} - Mg \sin \theta = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.165)$$

Colocando a equação (3.165) em ordem à sua derivada de maior grau, obtém-se a equação diferencial que descreve o sistema segundo o eixo dos x

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{M} - \frac{B}{M} \frac{dx}{dt} - g \sin \theta \quad (3.166)$$

Segundo o eixo dos y são aplicadas ao corpo a força gravítica segundo y P_y e a força de reacção normal R .

Normalmente, nestes sistemas a força R e a força P_y , têm valores simétricos, logo anulam-se.

$$R = P_y \quad (3.167)$$

$$R - P_y = M \times g \quad (3.168)$$

$$R - P_y = 0. \quad (3.169)$$

Utilizando as seguintes mudanças de variável para as equação segundo x

$$x_1 = x, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Obtém-se o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que descreve o comportamento do sistema.

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{B}{M}x_1 - g \sin \theta \end{cases} \quad (3.170)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{B}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F - \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta \end{bmatrix} g \quad (3.171)$$

Escolhendo como variável de saída a velocidade (x_2)

$$Y = CX + DU$$

$$Y = x_2$$

Logo

$$x_2 = [0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.172)$$

f) Pêndulo

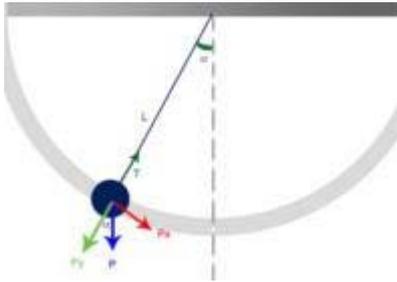


Figura 3-18 - Pêndulo

O sistema representado na figura 3-18 é um sistema mecânico rotacional. Logo as leis que o regem são as leis do movimento rotacional.

Este sistema é constituído por um fio (braço), de comprimento L , esticado, suspenso numa superfície com a qual faz um ângulo θ . Ao fio está preso um corpo de massa M .

As únicas forças aplicadas a este sistema são a força gravítica e a força que mantém o eixo do pêndulo fixo.

Através das equações do momento linear

$$J \times \alpha = \sum_i T_i \quad (3.173)$$

$$J = M \times L^2, \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.174)$$

e

$$m_x = -M \times g \times L \times \sin \theta \quad (3.175)$$

m_x é o único binário aplicado, onde

$$P_x = -M \times g \times \sin \theta \quad (3.176)$$

Sendo P_x a força gravítica segundo x .

Assim a equação que descreve o funcionamento deste sistema pode ser obtida através de

$$M \times L^2 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} = -M \times g \times L \times \sin \theta \quad (3.177)$$

Logo a equação diferencial que descreve o funcionamento do sistema é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (3.178)$$

Efectuando a mudanças de variável necessárias para obter um sistema de equações diferenciais de primeira ordem obtém-se

$$\begin{cases} \theta = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases} \quad (3.179)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{bmatrix} \quad (3.180)$$

Escolhendo como variáveis de saída o ângulo θ (x_1) e a velocidade angular ω (x_2)

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.181)$$

g) Salto de um pára-quedista



Figura 3-19 - Pára-quedista

A equação diferencial que representa a variação da altura de queda do pára-quedista em função do tempo é a seguinte.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \frac{a(t)}{m} \quad (3.182)$$

Onde g é a aceleração da gravidade, m é a massa do pára-quedista, y é a altura do corpo e α é a resistência do ar.

A resistência do ar α não é uma constante, pois varia com o quadrado da velocidade ($y'(t)$) e a constante de proporcionalidade K é diferente antes e depois da abertura do pára-quedas.

$$\alpha(t) = \begin{cases} K_1 y'(t)^2, & \text{antes da abertura do pára - quedas} \\ K_2 y'(t)^2, & \text{depois da abertura do pára - quedas} \end{cases} \quad (3.183)$$

De forma geral

$$\alpha(t) = K y'(t)^2 \quad (3.184)$$

Onde

$$K = \begin{cases} K_1, & \text{antes da abertura do pára - quedas} \\ K_2, & \text{depois da abertura do pára - quedas} \end{cases} \quad (3.185)$$

Designando y por y_1 , e $\frac{dy_1}{dt}$ por y_2 , obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$y = y_1 \quad (3.186)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{g}{m} \times K y_2^2 \end{cases} \quad (3.187)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{g}{m} \times K y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

Escolhendo como variáveis de saída o deslocamento (y_1) e a velocidade (y_2)

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (3.189)$$

h) Suspensão automóvel

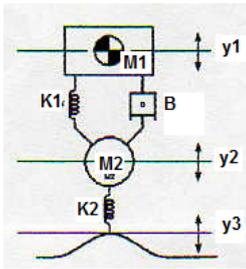


Figura 3-20 - Suspensão automóvel

O modelo que representa a suspensão de um automóvel é o apresentado na figura 3-20.

Ao corpo M1 são aplicadas a força elástica F_{e1} , a força de atrito F_B e a força gravítica F_{g1} .

Ao corpo M2 estão aplicadas a força elástica F_{e2} , a força gravítica F_{g2} , e as forças F_{e1} e F_B .

O sistema de equações diferenciais que descreve o comportamento deste sistema é o sistema de equações (3.190) [16]. Onde $M1$ e $M2$ são a massas dos dois corpos presentes, $K1$ e $K2$ são as constantes de elasticidade das duas molas e B é o coeficiente de amortecimento.

$$\begin{cases} M1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -M1g + K1(-y_1 + y_2) + B \frac{d(-y_1 + y_2)}{dx} \\ M2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -M2g + K1(y_1 - y_2) + B \frac{d(y_1 - y_2)}{dx} + K2(-y_2 + y_3) \end{cases} \quad (3.190)$$

Resolvendo em ordem à derivada de maior grau de cada equação

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -g + \frac{K1}{M1}(-y_1 + y_2) + \frac{B}{M1} \frac{d(-y_1 + y_2)}{dt} \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -g + \frac{K1}{M2}(y_1 - y_2) + \frac{B}{M2} \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} + \frac{K2}{M2}(-y_2 + y_3) \end{cases} \quad (3.191)$$

Efectuando as seguintes mudanças de variável

$$y_1 = x_1, \frac{dx_1}{dt} = x_2, y_2 = x_3 \text{ e } \frac{dx_3}{dt} = x_4$$

Obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -g + \frac{K1}{M1}(-x_1 + x_3) + \frac{B}{M1}(-x_2 + x_4) \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = -g + \frac{K1}{M2}(x_1 - x_3) + \frac{B}{M2}(x_2 - x_4) + \frac{K2}{M2}(-x_3 + y_3) \end{cases} \quad (3.192)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K1}{M1} & -\frac{B}{M1} & \frac{K1}{M1} & \frac{B}{M1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K1}{M2} & \frac{B}{M2} & -\frac{K1}{M2} & -\frac{K2}{M2} \\ \frac{K2}{M2} & \frac{B}{M2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{K2}{M2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (3.193)$$

Escolhendo como variáveis de saída o deslocamento y_1 (x_1) e o deslocamento y_2 (x_3)

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (3.194)$$

i) Pêndulo invertido

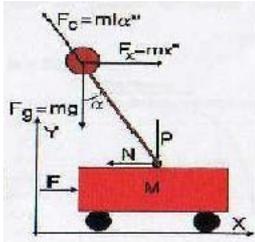


Figura 3-21 - Pêndulo invertido

Neste sistema, figura 3-21, existe um corpo de massa M que se desloca segundo o eixo dos x , e um pêndulo invertido, de comprimento l e massa m , ligado a parte superior do corpo de massa M e que se pode movimentar segundo o eixo dos x e do eixo dos y .

O pêndulo deve ficar equilibrado, variando a força F aplicada ao corpo de massa M , de maneira a que α tenda para 0.

Para este sistema consideram-se apenas as forças aplicadas segundo o eixo do x .

As forças aplicadas ao corpo M são a força F e a força N .

Logo pela lei de Newton

$$F - N = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.195)$$

$$F = M \frac{d^2x}{dt^2} + N. \quad (3.196)$$

Sabe-se que [17],

$$N = m \frac{d^2x}{dt^2} + ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} \cos \alpha - \frac{1}{2} ml \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \sin \alpha. \quad (3.197)$$

Substituindo na equação (3.196), obtém-se

$$F = (M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} \cos \alpha - \frac{1}{2} ml \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \sin \alpha. \quad (3.198)$$

Aplicadas ao pêndulo existem a força centrífuga F_c a força F segundo x , F_x , e a Força gravítica segundo x , F_{gx} .

$$F_c = ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (3.199)$$

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \cos \alpha \quad (3.200)$$

$$F_{gx} = mg \sin \alpha \quad (3.201)$$

Pela lei de Newton

$$\sum F_x = 0 \quad (3.202)$$

Então substituindo as expressões de F_c , F_x e F_{gx} na lei de Newton chega-se a

$$mg \sin \alpha = m \frac{d^2x}{dt^2} \cos \alpha + ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (3.203)$$

Observando as equações (3.200) e (3.201), vê-se que estas equações não são lineares.

Para tornar o sistema linear, é necessário efectuar algumas aproximações, [17].

$$\begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = \alpha \\ \frac{d\alpha}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.204)$$

Assim as equações ficam

$$\begin{cases} F = (M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + ml\alpha \\ mg\alpha = m \frac{d^2x}{dt^2} + ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \frac{d^2x}{dt^2} = F - mg\alpha \\ Ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} = (M + m)g\alpha - F \end{cases} \quad (3.205)$$

Colocando as equações em ordem à derivada de maior grau obtém-se o seguinte sistema de equações de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{M} - \frac{mg\alpha}{M} \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{(M+m)g}{Ml} \alpha - \frac{F}{Ml} \end{cases} \quad (3.206)$$

Efectuando as seguintes mudanças de variável

$$x = x_1, \frac{dx_1}{dt} = x_2, \alpha = y_1 \text{ e } \frac{dy_1}{dt} = y_2$$

Obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{mg y_1}{M} \\ \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{(M+m)g}{Ml} y_1 - \frac{F}{Ml} \end{cases} \quad (3.207)$$

Colocando em notação espaço de estados.

$$X' = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} F \quad (3.208)$$

Escolhendo como variáveis de saída o deslocamento x (x_1) e o ângulo α (y_1)

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (3.209)$$

3.2. Métodos Numéricos - Algoritmos

Os algoritmos descritos no capítulo 2 para resolução de equações diferenciais não podem ser usados directamente nos programas desenvolvidos, eles devem ser adaptados de maneira a poderem ser usados nos programas, pois as condições de paragem dos algoritmos originais não devem ser aplicadas nestes programas e a função que descreve cada sistema deve também ser em função da variável de entrada do sistema seja ela uma força, uma caudal, uma tensão ou uma temperatura. No caso da simulação em malha aberta a entrada do sistema é constante (força, caudal, tensão ou temperatura), em malha fechada a entrada do sistema é variável de controlo.

3.2.1. Algoritmo de Runge-Kutta

Neste algoritmo as alterações a fazer relativamente ao original são retirar as variáveis *sup* (limite superior) e *tol* (tolerância), e consequentemente a condição de paragem $(x_{i+1} - \text{sup}) \leq \text{tol}^{1/2}$ presente na linha cinco do algoritmo 2.1 (capítulo 2). O algoritmo deve ser executado continuamente até que o utilizador diga para parar. A função $f(x, y)$ também é alterada pois, esta também passa a ser em função da variável de entrada do sistema, $f(x, y, \text{entrada})$. O parâmetro *entrada* do sistema, de acordo com o caso escolhido, pode representar a força, o caudal, a tensão ou a temperatura.

As modificações feitas no algoritmo 2.1 são mostradas a seguir, em que h designa a distância entre cada ponto x_i , v é a variável de saída e *entrada* representada a variável de entrada do sistema a simular.

Algoritmo 3.1 Método de Runge-Kutta utilizado (o sinal ... representa linha igual ao algoritmo 2.1)

1. Ler *ordem* (1, 2, 3 ou 4), h , x_0 , y_0 e *entrada*.
2. Introduzir a função $f(x, y, entrada)$.
3. Fazer $i=0$ para a primeira iteração.
4. ...
5. Calcular $f_i = f(x_i, y_i, entrada)$ e $p_1 = hf_i$.
6. Se *ordem* = 1 então fazer $c_1 = 1$.
7. Senão
 - 7.1. Se *ordem* = 2 então $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e calcular $z_i = y_i + p_1$,
 $g_i = f(x_{i+1}, z_i, entrada)$ e $p_2 = hg_i$.
 - 7.2. Senão
 - 7.2.1. Se *ordem* = 3 então fazer $c_1 = 0.5$, $c_3 = c_1$ e $c_2 = 4c_1$ e calcular
 $z_i = y_i + 0.5p_1$, $r_i = x_i + 0.5h$, $g_i = f(r_i, z_i, entrada)$, $p_2 = hg_i$,
 $t_i = y_i - p_1 + 2p_2$, $g_i = f(x_{i+1}, t_i, entrada)$ e $p_2 = hg_i$.
 - 7.2.2. Senão fazer $c_1 = 2/3$, $c_4 = c_1$, $c_2 = 2c_1$ e $c_3 = c_2$ e calcular $z_i = y_i +$
 $0.5p_1$, $r_i = x_i + 0.5h$, $g_i = f(r_i, z_i, entrada)$, $p_2 = hg_i$, $z_i = y_i +$
 $0.5p_2$ $g_i = f(r_i, z_i, entrada)$, $p_3 = hg_i$, $z_i = y_i + 0.5p_3$, $g_i =$
 $f(x_{i+1}, t_i, entrada)$ e $p_4 = hg_i$.
8. Calcular $y_{i+1} = y_i + (\sum_{j=1}^{ordem} c_j p_j) / ordem$.
9. Fazer $v = y_i$.
10. Fazer $i = i + 1, n = i$ ir para o passo 4.

3.2.2. Métodos preditores-correctores de Euler e Adams

De igual modo ao método descrito na sessão anterior, as variáveis *sup* e *tol* devem ser retiradas do algoritmo 2.2 assim como a condição $(x_{i+1} - sup) \leq tol^{1/2}$ nos passos 1 e 6, respectivamente. Também é alterada a função $f(x, y)$ pois esta também

passa a ser em função da variável de entrada do sistema, $f(x, y, entrada)$. O valor do parâmetro $entrada$ toma os mesmos valores definidos no algoritmo anterior.

As modificações feitas no algoritmo 2.2 são mostradas a seguir, em que h designa a distância entre cada ponto x_i , v é a variável de saída e $entrada$ é a variável de entrada do sistema a simular.

Algoritmo 3.2. Método Preditor-Corrector utilizado (o sinal ... representa linha igual ao algoritmo 2.2)

1. Ler *ordem* (2 ou 4), h , x_0, y_0 e *entrada*.
2. Introduzir a função $f(x, y, entrada)$.
3. Para $j = 0, ordem - 2$.
 - 3.1. ...
 - 3.2. Calcular $f_j = f(x_j, y_j, entrada)$ e $p_1 = hf_j$.
 - 3.2.1. Se *ordem* = 2 então fazer $c_1 = 1, c_2 = 1$ e calcular $z_j = y_j + p_1, g_j = f(x_{j+1}, z_j, entrada)$ e $p_2 = hg_j$.
 - 3.2.2. Senão fazer $c_1 = \frac{2}{3}, c_4 = c_1, c_2 = 2c_1$ e $c_3 = c_2$ e calcular $z_j = y_j + 0.5p_1, r_j = x_j + 0.5h, g_j = f(r_j, z_j, entrada), p_2 = hg_j, z_j = y_j + 0.5p_2, g_j = f(r_j, z_j, entrada), p_3 = hg_j, z_j = y_j + p_3, g_j = f(x_{j+1}, z_j, entrada)$ e $p_4 = hg_j$.
 - 3.3. ...
4. ...
5. ...
6. Calcular $f_i = f(x_i, y_i, entrada)$
7. Se *ordem*=2 então calcular $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}, entrada)$ e $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i)$.
8. Senão calcular $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}, entrada)$ e $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$.
9. Fazer $v = y_i$
10. Fazer $i = i + 1, n = i$ e ir para o passo 5.

3.2.3. Sistemas de equações diferenciais

Como os dois métodos anteriores as variáveis *sup* e *tol* devem ser retiradas do algoritmo assim como a condição $(x_{i+1} - \text{sup}) \leq \text{tol}^{1/2}$ nos passos 1 e 6, respectivamente, e no passo 6.5.2. A função $f(x, y)$ é alterada, pois esta também passa a ser em função da variável de entrada do sistema, $f(x, y, \text{entrada})$.

As modificações feitas no algoritmo 2.3 são mostradas a seguir, em que h designa a distância entre cada ponto x_i , v é a variável de saída, *equa* é a variável usada para seleccionar o tipo de método e *entrada* é variável de entrada do sistema a simular.

R.K. – Runge-Kutta.

P.C. – Método predictor-corrector.

Algoritmo 3.3. Método utilizado para a resolução de sistemas de equações diferenciais (o sinal ... representa linha igual ao algoritmo 2.3)

1. Ler n , *equa* (“R. K.” ou “P. C.”), h , x_0 , *entrada*.
2. ...
3. Para $i=1, \dots, n$ introduzir as funções $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \text{entrada})$.
4. Fazer $j=0$ para a primeira iteração.
5. ...
6. Para $i=1, \dots, n$ calcular $f_{ij} = f_i(x_j, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}, \text{entrada})$, $p_i = hf_{ij}$ e $z_i = y_{ij} + p_i$,
7. Para $i=1, \dots, n$ calcular $g_i = f_i(x_{j+1}, z_1, z_2, \dots, z_n, \text{entrada})$ e $q_i = hg_i$.
8. Para $i=1, \dots, n$ calcular $y_{ij+1} = y_{ij} + \frac{1}{2}(p_i + q_i)$.
9. Se *equa* = “R. K.” então fazer $j = j + 1$, $m = j$, $v = y_i$ e ir para o passo 5.
10. Senão
 - 10.1. Calcular $x_{j+2} = x_{j+1} + h$.
 - 10.2. Para $i=1, \dots, n$ calcular $f_{ij+1} = f_i(x_{j+1}, y_{1j+1}, y_{2j+1}, \dots, y_{nj+1}, \text{entrada})$, e $y_{ij+2} = y_{ij+1} + \frac{h}{2}(3f_{ij+1} - f_{ij})$.
 - 10.3. Para $i=1, \dots, n$ calcular $g_i = f_i(x_{j+2}, y_{1j+2}, y_{2j+2}, \dots, y_{nj+2}, \text{entrada})$.
 - 10.4. Para $i=1, \dots, n$ calcular $y_{ij+1} = y_{ij+1} + \frac{h}{2}(g_i + f_{ij+1})$.

- 10.5. Fazer $v = y_i$.
- 10.6. Fazer $j = j + 1$, $m = j + 1$ e ir para o passo 10.1.

3.3. Algoritmos de controlo

Os tipos de controlador usados neste trabalho são o On-Off e PID (Proporcional Integral e Derivativo). Enquanto que para o On-Off existe apenas uma implementação, para o PID existem quatro implementações possíveis, que são, o algoritmo de velocidade, o algoritmo de posição, o algoritmo de velocidade modificado e o algoritmo de posição modificado (capítulo 2).

3.3.1. Malha aberta

O funcionamento do sistema em malha aberta corresponde a simular o processo sem a acção de um controlador.

A seguir é apresentado o algoritmo para o sistema em malha aberta, onde v é a variável de saída, *entrada* é a entrada do sistema (força, caudal, tensão ou temperatura) e *equa* é a variável que permite escolher o método numérico a utilizar, 0 – Runge-Kutta, 1 – preditor-corrector. Salientar que é o utilizador que decide “parar” a execução do programa.

Algoritmo 3.4.

1. Ler o valor de *equa*.
2. Ler *entrada*
3. Se *equa*=0 então
 - 3.1. Método de Runge-Kutta.
 - 3.2. Fazer $v = y_i$.
4. Senão
 - 4.1. Se *equa*=1 então
 - 4.1.1. Método Preditor-corrector.
 - 4.1.2. Fazer $v = y_i$.
5. Saltar para o passo 1.

3.3.2. Controlador On-Off

O algoritmo para a função On-Off é apresentado de seguida, onde v é a variável de saída (y_i), v_{ref} é a variável de referência, $histerese$ representa a margem de histerese do controlador, $histerese2$ é metade da margem de histerese definida e serve para definir os limites máximo e mínimo para a variável de saída, $entrada$ é a entrada do sistema (Força, caudal, tensão ou temperatura) e que neste caso é também o valor do actuador, $entrada_max$ representa o valor máximo do actuador e $equa$ é parâmetro que permite escolher o método numérico a utilizar 0 – Runge-Kutta, 1 – preditor-corrector.

Algoritmo 3.5.

1. Ler valores de v , v_{ref} , $histerese$ e $equa$.
2. $histerese2 = histerese / 2$
3. Se $v \geq v_{ref} + histerese2$, então
 - 3.1. Fazer $entrada = 0$
 - 3.2. Se $equa = 0$, Método de Runge-Kutta
 - 3.3. Fazer $v = y_i$.
 - 3.4. Senão
 - 3.4.1. Se $equa = 1$, Método Preditor-corrector
 - 3.4.2. Fazer $v = y_i$
4. Senão
 - 4.1. Se $v \leq v_{ref} - histerese2$, então
 - 4.1.1. Fazer $entrada = entrada_max$
 - 4.1.2. Se $equa = 0$, Método de Runge-Kutta.
 - 4.1.3. Fazer $v = y_i$.
 - 4.1.4. Senão
 - 4.1.4.1. Se $equa = 1$, Método Preditor-corrector.
 - 4.1.4.2. Fazer $v = y_i$.
 - 4.1.5. Senão
 - 4.1.5.1. Se $v_{ref} - histerese < v < v_{ref} + histerese$, então
 - 4.1.5.1.1. Se $equa = 0$, Método de Runge-Kutta.
 - 4.1.5.1.2. Fazer $v = y_i$.

4.1.5.2. Senão

4.1.5.2.1. Se $equa=1$, Método Preditor-corrector.4.1.5.2.2. Fazer $v = y_i$.

5. Saltar para o passo 1.

3.3.3. Controlador PID

O algoritmo que é apresentado a seguir está dividido em duas partes, para melhor entendimento do mesmo. O algoritmo implementa as quatro variações do controlador PID descritas no capítulo 2. Neste algoritmo v é a variável de saída, $equa$ é usada para seleccionar qual o método numérico, y é o vector de saída do método numérico, $vtemp$ é um vector auxiliar que guarda o valor de v , alg é a variável que permite escolher qual o algoritmo de controlo, $array$ guarda o valor da variável v , $arrpid$ guarda o valor de cn (variável de controlo), $erro$ guarda a diferença entre a variável de saída e a variável de referência, $vref$ é a variável de referência, $tempo$ é variável de contagem de tempo de execução do programa, e $entrada$ é a entrada do sistema (Força, caudal, tensão ou temperatura), que vai ficar com o valor da variável de controlo.

No algoritmo existe faz-se a verificação se o $tempo$ é múltiplo do período de amostragem T , pois só nestes instantes de tempo é que a variável de controlo deve ser actualizada, mantendo o valor anterior nos restantes.

Algoritmo 3.6.

- **Rotina de selecção.**
 1. Ler o valor de $equa$.
 2. Se $equa=0$ então
 - 2.1. Se $Tempo_i$ é múltiplo de T , então
 - 2.1.1. Chamar PID().
 - 2.2. Senão
 - 2.2.1. $cn = arrpid_{n-1}$, $arrpid_n = cn$
 - 2.3. $entrada=cn$.
 - 2.4. Método de Runge-Kutta.
 - 2.5. Fazer $v = y_i$.
 - 2.6. Fazer $vtemp = v$.

3. Senão

3.1. Se $equa=1$ então

3.1.1. Se $Temp_i$ é múltiplo de T , então

3.1.1.1. Chamar PID().

3.1.2. Senão

3.1.2.1. $cn = arrpid_{n-1}$, $arrpid_n = cn$

3.1.3. $entrada=cn$.

3.1.4. Método Preditor-corrector.

3.1.5. Fazer $v = y_i$.

3.1.6. Fazer $vtemp = v$.

4. Saltar para o passo 1.

• **Função PID.**

1. Ler K_p , τ_i , τ_d , T (período de amostragem), $array_n$, $array_{n-1}$, $array_{n-2}$, $array_{n-3}$, $arrpid_{n-1}$, $erro_{n-1}$, $erro_{n-2}$, $erro_{n-3}$, $tempo$, alg , $cest$ e $vref$.

2.

2.1. Calcular $erro_n = vref - array_{n-1}$ e $sumerro = erro_n + sumerro$.

2.2. Se $alg=0$ então

$$2.2.1. \quad cn = arrpid_{n-1} + K_p \times \left((erro_n - erro_{n-1}) + \left(\frac{T}{\tau_i}\right) \times erro_n + \left(\frac{\tau_d}{T}\right) \times (erro_n - 2 \times erro_{n-1} + erro_{n-2}) \right), \quad arrpid_n = cn.$$

2.3. Senão, se $alg=1$ então

$$2.3.1. \quad cn = arrpid_{n-1} + K_p \times \left((array_{n-2} - array_{n-1}) + \left(\frac{T}{\tau_i}\right) \times erro_n + \left(\frac{\tau_d}{T}\right) \times (-array_{n-1} - 2 \times array_{n-2} + array_{n-3}) \right), \quad arrpid_n = cn.$$

2.4. Senão, se $alg=2$ então

$$2.4.1. \quad cn = cest + K_p \times \left(erro_n + \left(\frac{T}{\tau_i}\right) \times sumerro + \left(\frac{\tau_d}{T}\right) \times (erro_n - erro_{n-1}) \right), \quad arrpid_n = cn.$$

2.5. Senão, se $alg=3$ então

$$2.5.1. \quad cn = cest + K_p \times \left(erro_n + \left(\frac{T}{\tau_i} \right) \times sumerro + \left(\frac{\tau_d}{T} \right) \times (array_{n-2} - array_{n-1}) \right), \quad arrpid_n = cn.$$

3. Voltar para rotina de selecção.

3.4. Programação

Os programas desenvolvidos no âmbito deste trabalho foram construídos recorrendo à linguagem de programação JAVA. Esta linguagem foi escolhida devido à sua versatilidade, e fácil integração em páginas de internet. Os programas são designados por JAVA Applets, que são aplicações que podem ser facilmente inseridas numa página de internet e executadas a partir desta.

A página web que serve de suporte aos Java Applets foi desenvolvida em linguagem html. Esta página web além de ser o suporte aos Java Applets, também possui suporte teórico às simulações.

3.4.1. Interface do programa.

Embora tenham sido desenvolvidos vários *applets*, um para cada sistema, a interface de cada um é muito semelhante, variando apenas os parâmetros de entrada do sistema.

Na figura 3-22 é apresentada a interface de um dos programas.

As áreas estão identificadas por rectângulos para melhor compreensão da interface. O utilizador pode ter acesso a este esquema através do link “Instruções” disponível nas paginas de cada simulação de sistema (Anexo A, Figura A.6).

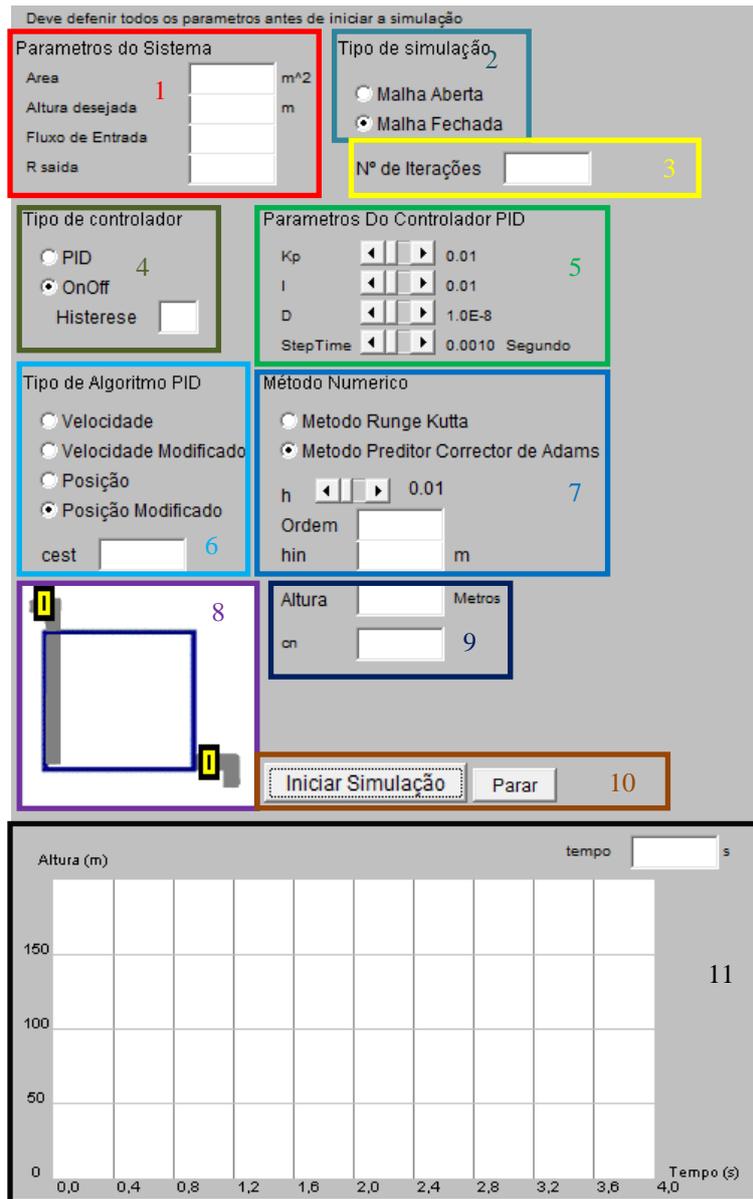


Figura 3-22 - Interface dos programas em JAVA

Rectângulo 1 – nesta área são introduzidos os parâmetros do sistema a simular.

Rectângulo 2 – selecção do tipo de simulação a efectuar, malha aberta ou malha fechada.

Rectângulo 3 – número de iterações pretendido, ou seja, o número de vezes que o programa deve ser executado, o limite máximo são 800 iterações.

Rectângulo 4 – Esta área é destinada à escolha do tipo de controlador, PID ou On-Off, e à definição da margem de histerese para o controlador On-Off.

Rectângulo 5 – definição dos parâmetros do controlador PID e o período de amostragem.

K_p - ganho proporcional do controlador,

I - τ_i constante de tempo integral,

D - τ_d , constante de tempo derivativo,

StepTime – Período de amostragem,

Rectângulo 6 – Esta área destina-se a escolha do tipo de algoritmo de controlo PID e à definição do valor da variável $cest$, acção de controlo em estado estacionário.

Rectângulo 7 – Seleccionar o tipo de método numérico a utilizar, definir o valor da variável h , que define o passo de cálculo do método numérico e espaçamento entre os instantes de tempo, e das condições iniciais do sistema (neste caso hin que representa a altura inicial). Também se pode definir a ordem do método numérico, que no caso do método de Runge-Kutta pode ser de 1, 2, 3 ou 4, e no método preditor-corrector pode ser de ordem 2 ou 4.

Rectângulo 8 – Imagem que representa o sistema. Pode ser uma imagem com animação ou não.

Rectângulo 9 – Valor da variável de saída (controlada) e o valor da acção de controlo para o controlador PID e On-Off.

Rectângulo 10 – Na área 10 existem os botões para iniciar/reiniciar a simulação e parar/continuar simulação.

O botão iniciar/reiniciar, é iniciar na primeira execução do programa, mudando então para reiniciar permitindo assim ao utilizador reiniciar a simulação desde inicio sempre que quiser.

O botão parar/continuar que permite para a simulação a qualquer momento, e continua-la a partir do momento onde foi parada.

Rectângulo 11 – Nesta área esta presente o gráfico onde é mostrado o comportamento do sistema ao longo do tempo. É de referir que a escala dos tempos é alterada conforme o h escolhido.

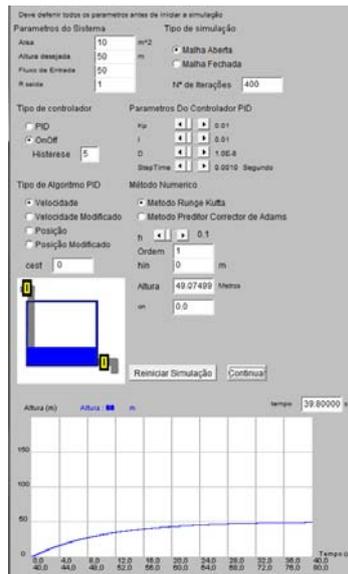


Figura 3-23 - Exemplo de um dos programas a funcionar

3.4.2. A página Web desenvolvida

Uma das características requeridas pela página web desenvolvida era que para além das simulações, também teria que oferecer suporte teórico às mesmas simulações.

A partir da página Home (pagina principal) o utilizador tem acesso, seleccionando a respectiva opção, à página correspondente aos métodos numéricos onde está toda a teoria relacionada com os métodos numéricos, à página de controlo onde se pode encontrar os conceitos teóricos relacionados com controlo e a pagina do simulador onde se pode encontrar quais os tipos de sistemas que se podem simular e uma explicação de como funciona o simulador.

Na página de métodos numéricos tem-se acesso a toda a informação, relacionada com este tema, necessária às simulações desenvolvidas, estando a descrição dos métodos numéricos utilizados nas simulações em três páginas adicionais (uma pagina por método) com o respectivo algoritmo.

Na página correspondente ao controlo permite o acesso às páginas onde se descrevem os diversos tipos de controlador existentes, desde o funcionamento do sistema em malha aberta até ao controlador PID.

Na página simulador pode-se escolher o tipo de sistema a simular. Escolhido o tipo de sistema a simular, têm-se acesso a uma página com informação sobre esse tipo de sistema onde se pode seleccionar qual o sistema a simular, tendo acesso à simulação do sistema seleccionado.

Na figura 3-24 pode-se ver a estrutura completa da página desenvolvida.

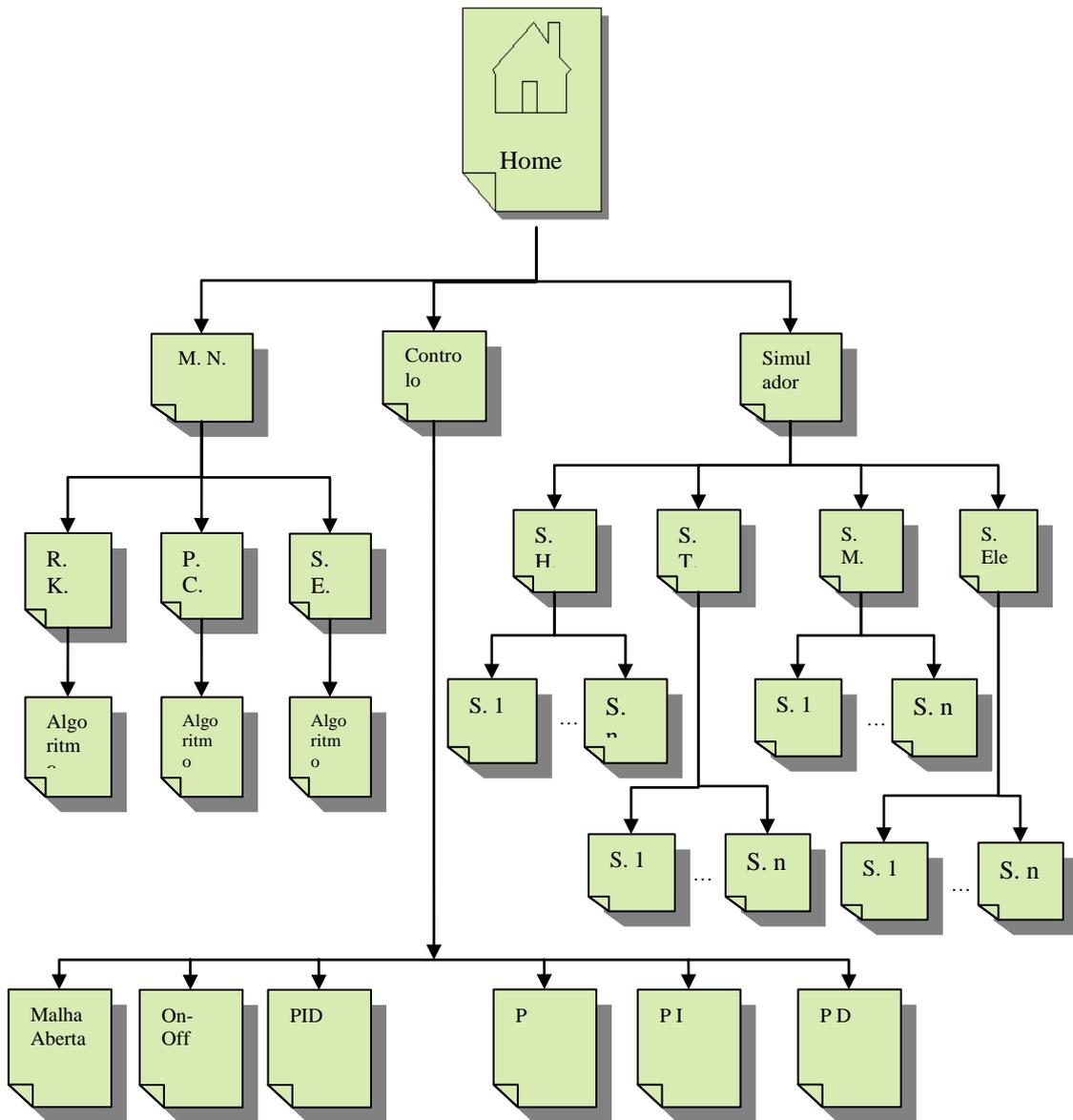


Figura 3-24 - Esquema da página web

Legenda:

M. N. – Métodos Numéricos.

R. K. – Runge-Kutta.

P. C. – Preditores-correctores.

PID – Proporcional integral e derivativo.

P – Proporcional.

S. M. – Sistemas mecânicos.

S. Elec. – Sistemas Eléctricos.

S. – Sistema.

S. E. – Sistemas de Equações.

S. H. – Sistemas Hidráulicos.

S. T. – Sistemas térmicos.

S. n – Sistema n.

PD – Proporcional e derivativo.

PI – Proporcional e integral

A figura 3-25 apresenta uma vista geral do aspecto da página inicial, Home.

Na parte superior da página podem se ver os temas principais da página desenvolvida, métodos numéricos, controlo e simulador.



Figura 3-25 - Página inicial Home

Se for seleccionado o separador métodos numéricos têm-se acesso à página inicial deste tema, representada na figura 3-26, podendo-se seleccionar na caixa lateral métodos numéricos qual o método numérico que se pretende estudar.



Figura 3-26 - Pagina dedicada aos Métodos Numéricos

Seleccionando o separador controlo, é apresentada a página inicial de controlo, figura 3-27. De maneira semelhante à página de métodos numéricos, na caixa lateral Tipos de Controlo pode-se seleccionar qual o tema de controlo que se pretende estudar.



Figura 3-27 - Página dedicada ao Controlo

Ao escolher o separador Simulador/sistemas, tem-se acesso a uma página, figura 3-28, onde na caixa sistemas se pode escolher qual o tipo de sistema a simular. Na página do tipo de sistema a simular na caixa simulações pode-se escolher qual o sistema a simular dentro do tipo de sistema escolhido.



Figura 3-28 – Página Sistemas/Simulador

No Anexo A, estão representados alguns exemplos das páginas principais que o utilizador pode encontrar para o caso de um sistema hidráulico (Anexo A, Figuras A.1 – A.6).

CAPÍTULO 4 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para algumas das simulações. Não são apresentados para todas as simulações pois os princípios aplicados são os mesmos variando apenas a equação diferencial que caracteriza cada um dos sistemas.

Os resultados são obtidos variando os vários parâmetros do modelo, o método numérico e o algoritmo de controlo.

4.1. Resultados para um sistema de primeira ordem

O sistema de primeira ordem escolhido para obter os resultados é o sistema hidráulico de primeira ordem.

Embora os valores escolhidos não sejam os mais prováveis de encontrar num caso real, eles foram escolhidos pois permitem ver uma evolução rápida do comportamento do sistema, no gráfico construído na simulação, permitindo testar os algoritmos desenvolvidos.

4.1.1. Simulação em malha aberta

Na simulação em malha aberta o sistema evolui sem acção de controlo.

Foram efectuados os testes com os métodos de Runge-Kutta e Predictor-corrector, que se passam a descrever a seguir.

a) Aplicando o Método de Runge-Kutta.

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros, em que h é o espaçamento entre os instantes de tempo e h_{in} é a altura inicial.

Área do tanque:	1 m ² .	h:	0.01.
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	h _{in} :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta

Como se pode ver na figura 4-1, o sistema em malha aberta tende a estabilizar num valor igual ao caudal de entrada. Isto deve-se ao facto do caudal de entrada ser constante e também da área do tanque e da resistência de saída serem iguais a 1.

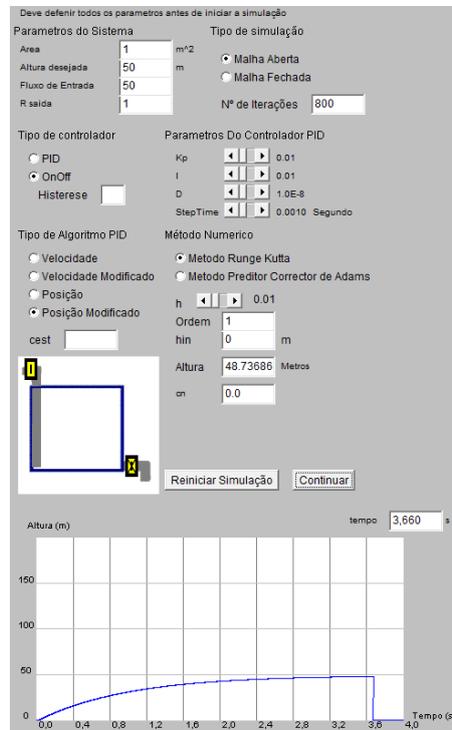


Figura 4-1 - Simulação em malha aberta com ordem=1

Mantendo os outros parâmetros mas variando a ordem do método, para 2, 3 ou 4.

Como se pode ver pelas figuras 4-1, 4-2, 4-3 e 4-4, o comportamento do sistema é muito semelhante nos quatro casos, com os valores obtidos a serem muito próximos.

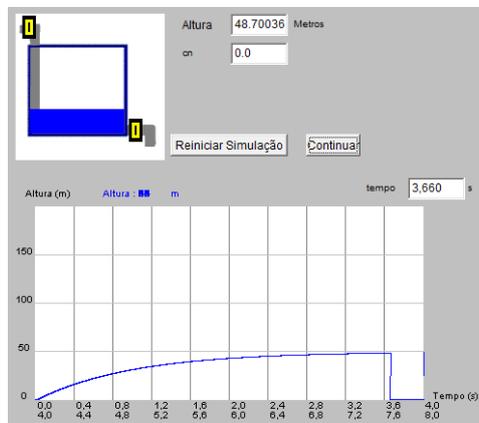


Figura 4-2 - Simulação em malha aberta com ordem=2

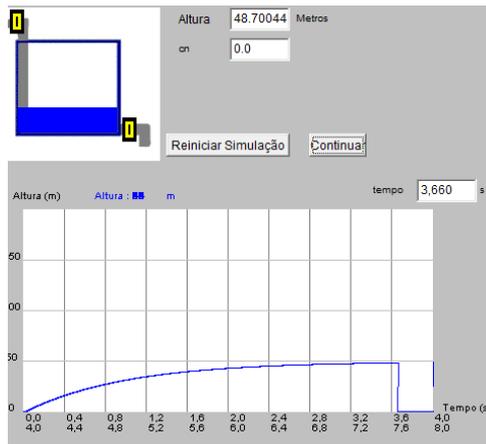


Figura 4-3 - Simulação em malha aberta com ordem=3

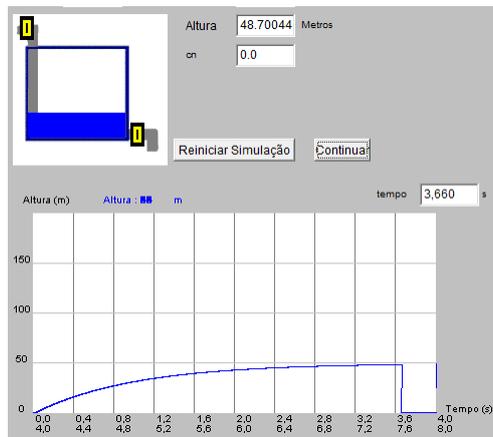


Figura 4-4 - Simulação em malha aberta com ordem=4

b) Aplicando o Método Preditor-corrector de Adams

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.01.
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	2 ou 4
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	<i>h</i> _{in} :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Preditores-correctores.

Como se pode ver nas figuras 4-5 e 4-6, o sistema responde de forma semelhante (quase igual), para ambas as ordens, com os valores obtidos para a altura do tanque serem muitos próximos.

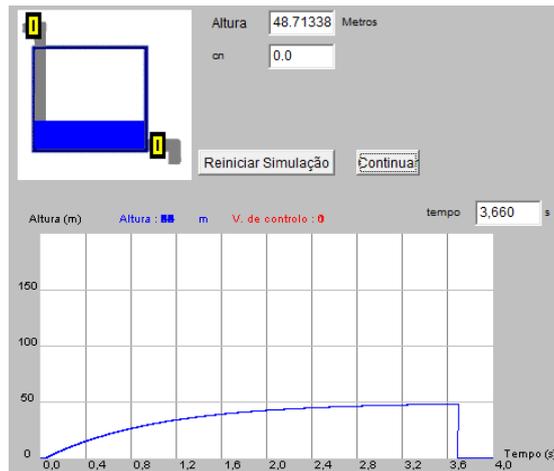


Figura 4-5 - Sistema em malha aberta, método Preditor-corrector de Adams de 2ª ordem

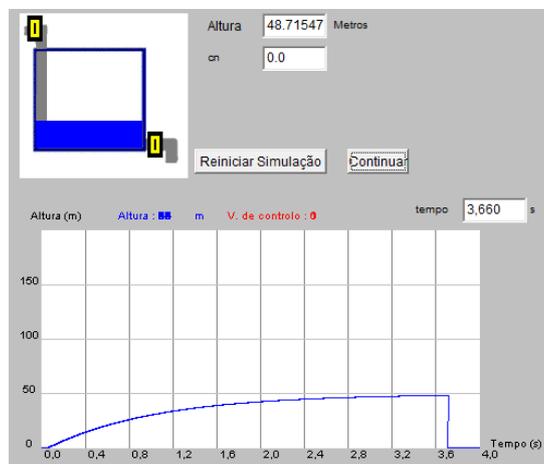


Figura 4-6 - Sistema em malha aberta, método Preditor-corrector de Adams de 4ª ordem.

c) Efeito das condições iniciais

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.01.
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	<i>h_{in}</i> :	10
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta/Preditor-corrector de Adams.

Como se pode ver na figura 4-7, existe um salto no início, tanto para o método de Runge-Kutta como para o método Preditor-corrector de Adams, devido ao facto do *h_{in}* ser diferente de zero, o que faz com que o método numérico comece a calcular com um *y* superior a zero.

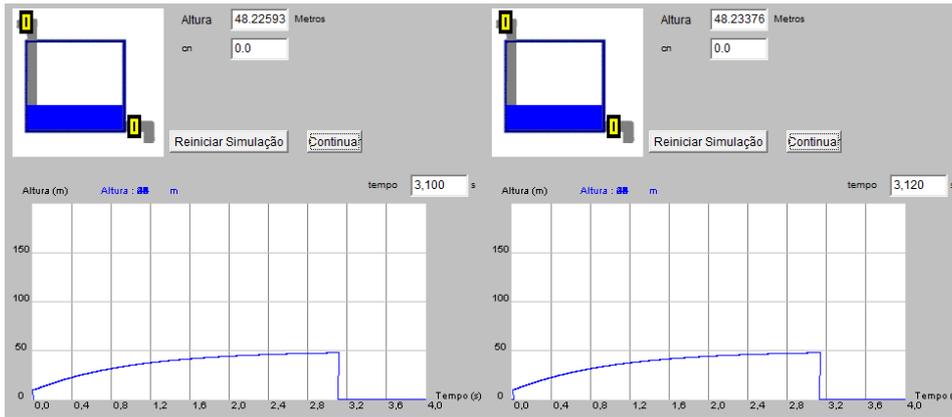


Figura 4-7 - Simulação malha aberta, com h_{in} diferente de 0, utilizando os métodos de Runge-Kutta (esquerda) e predictor-corrector (direita).

d) Efeito do espaçamento entre os instantes de tempo – h

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	h :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	h_{in} :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta

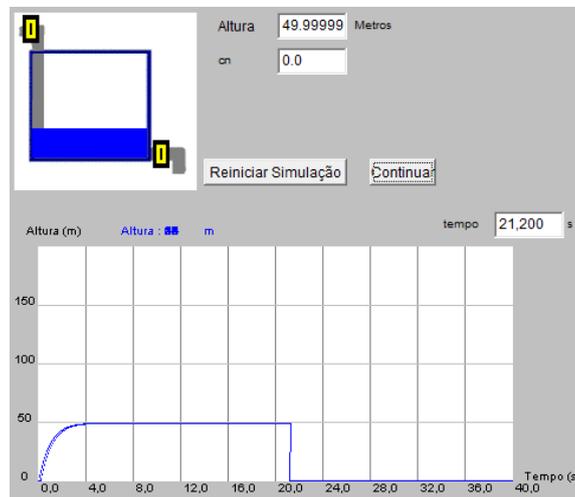


Figura 4-8 - Simulação em malha aberta com $h=0.1$

Aumentando o valor de h , o gráfico parece evoluir mais rapidamente, isto deve-se ao facto de o espaçamento entre os instantes de tempo aumentar, fazendo com que o método numérico efectue menos cálculos para atingir o valor pretendido, mas o tempo que demora a estabilizar é praticamente o mesmo.

4.1.2. Simulação em malha fechada com controlador On-Off

Nesta simulação foi aplicado ao sistema o controlador On-Off, logo é necessário definir uma margem de histerese, que para o caso presente na figura 4-9 é de 10, pois esse valor é usado para definir os limites máximos e mínimo para a variável de saída.

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	10 m ² .	<i>h</i> :	0.1
Altura desejada:	25 m.	Ordem:	4
Fluxo/caudal:	50 Kg/s.	hin:	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta/ Preditor-corrector de Adams.
Histerese	10		

Como se pode ver na figura 4-9, assim que o valor da altura (linha azul) do tanque atinge a altura desejada mais cinco (metade da margem de histerese), a variável de controlo *cn* (linha a vermelho) é colocada com o seu valor mais baixo, 0, voltando a ter o seu valor máximo (igual ao valor do caudal de entrada), quando a variável de saída atinge a altura desejada menos 5. Isto faz com que a variável de saída oscile entre os seus valores máximo e mínimo.

Se fosse escolhido o método preditor-corrector em vez do de Runge-Kutta, os resultados seriam semelhantes como mostra a figura 4-10.

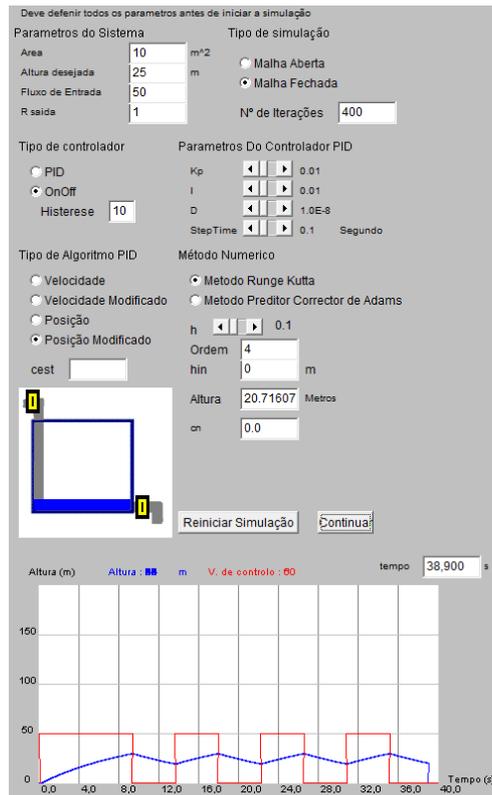


Figura 4-9 - Simulação em malha fechada, com controlador On-Off e método de Runge-Kutta.

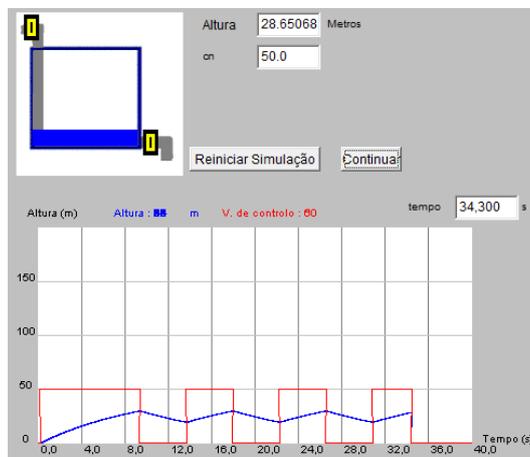


Figura 4-10 - Simulação em malha fechada com controlador On-Off e método preditor-corrector de Adams.

4.1.3. Simulação em malha fechada com controlador PID

A seguir são apresentados os resultados da simulação para o sistema em malha fechada com controlador PID. Nos gráficos a linha azul representa a variável controlada e a linha vermelha a variável de controlo.

a) **Algoritmo de velocidade.**

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	hin:	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Steptime:	0.1 s	I:	0.5
Kp:	0.07	D:	1.0×10 ⁻⁸

Pela figura 4-11, vê-se que a variável de saída tende a seguir o comportamento da variável de controlo e que a variável de saída estabiliza ao chegar ao valor pretendido para a altura de água do tanque. Na figura 4-11 também se pode ver que existe um pequeno salto no valor inicial da variável de controlo, que não começa em zero.

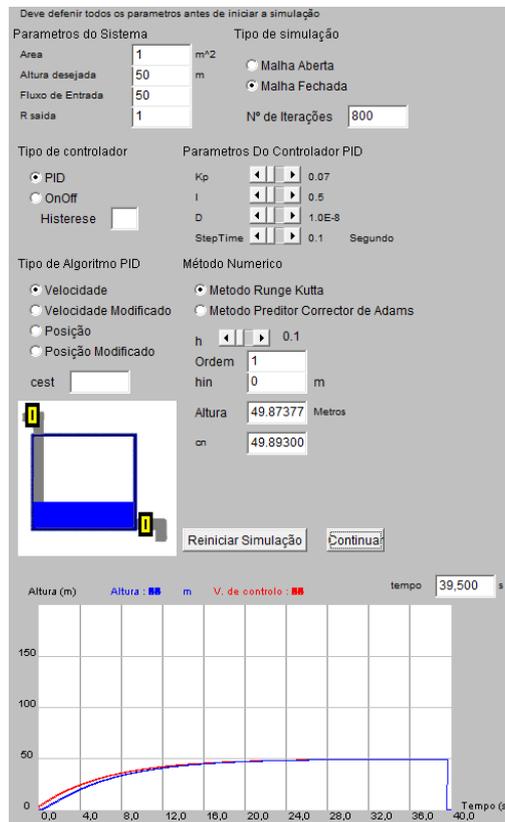


Figura 4-11 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade

Para efectuar a simulação presente na figura 4-12 alterou-se o **steptime** para 0.5, mantendo todos os outros valores.

Como se pode ver pela figura 4-12 com um valor de steptime superior ao valor de *h* o gráfico da variável de controlo já não é uma linha contínua, apresentado pequenos saltos entre valores, isto deve-se ao facto de o valor da variável de controlo

ser mantido constante quando o valor do tempo nesse instante não é múltiplo do período de amostragem.

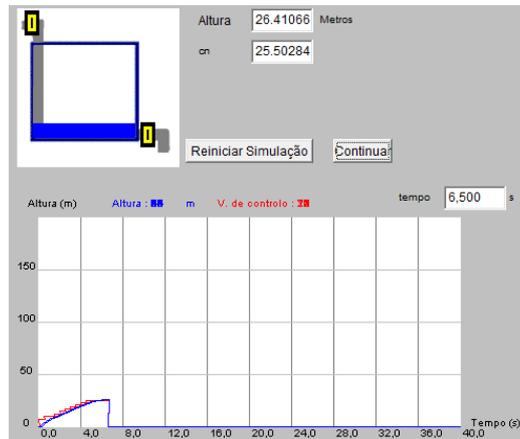


Figura 4-12 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade e steptime=0.5s

Aumentando apenas o valor de **K_p** para 0.15, pode-se ver pela figura 4-13 que o sistema responde mais rapidamente pois o aumento do K_p faz diminuir o tempo de subida, mas novamente existe um salto no valor inicial da variável de controlo.

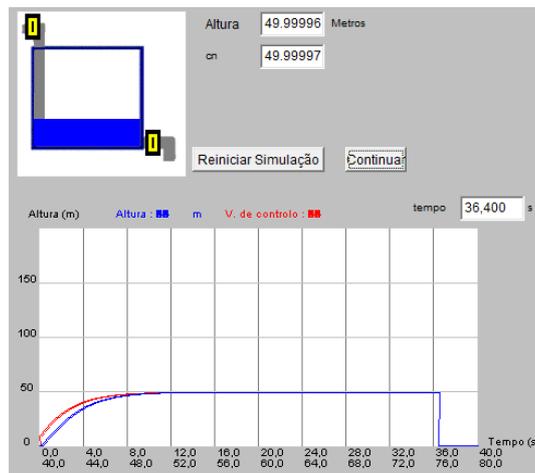


Figura 4-13 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade com K_p=0.15

Diminuindo o valor de **I** para 0.05, aumentando o valor de **D** para 1.0×10^{-7} , e voltando a por o **steptime** igual a 0.1s, mas mantendo os restantes valores relativamente à simulação anterior. Assim para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	<i>h_{in}</i> :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Steptime:	0.1 s	I :	0.05

K_p : 0.15 D : 1.0×10^{-7}

Observando a figura 4-14 pode-se ver que com estes valores para os parâmetros do controlador PID, o sistema responde mais rápido, mas estes valores também fazem com que o sistema oscile, em torno do valor pretendido para a altura do tanque. Também se pode ver que as oscilações vão se tornando cada vez mais pequenas com o passar do tempo aproximando-se cada vez mais do valor pretendido.

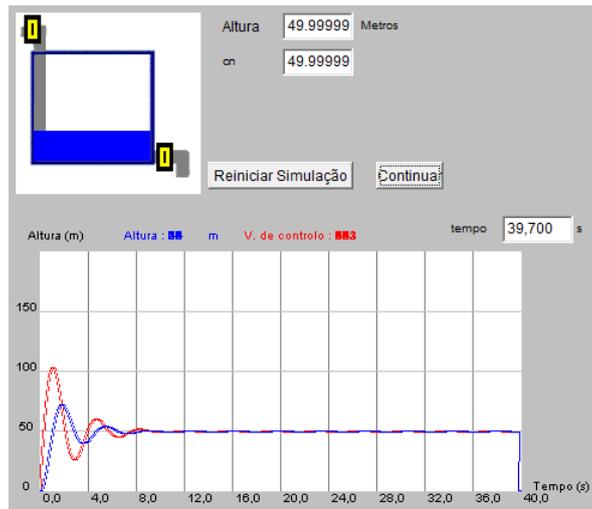


Figura 4-14 - Simulação em malha fechada controlador PID de velocidade

b) Algoritmo de velocidade modificado

Para esta simulação os valores dos parâmetros foram os mesmos do algoritmo de velocidade.

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	h :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	h_{in} :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Steptime:	0.1 s	I:	0.5
K_p :	0.07	D:	1.0×10^{-8}

Como se pode ver pela figura 4-15, neste caso a resposta do sistema é semelhante à do sistema quando se aplica o algoritmo de velocidade, mas com uma diferença, já não existe o salto inicial na variável de controlo, pois o algoritmo de velocidade modificado corrige esse efeito.

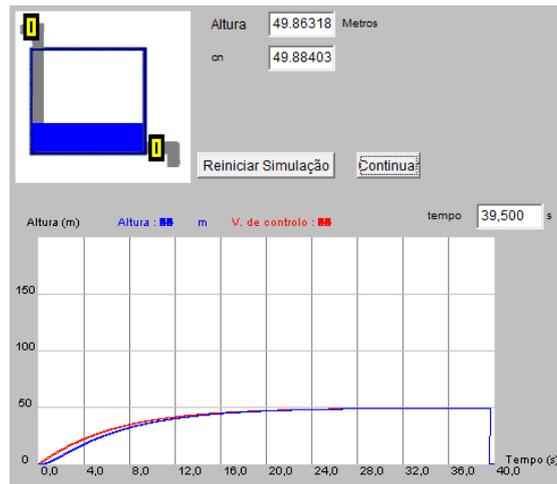


Figura 4-15 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade modificado.

Aumentando apenas o valor de **K_p** para 0.15, pode-se ver pela figura 4-16 que o sistema responde mais rapidamente pois aumentando o valor de K_p o tempo de subida diminui, verifica-se também que não existe o salto inicial na variável de controlo

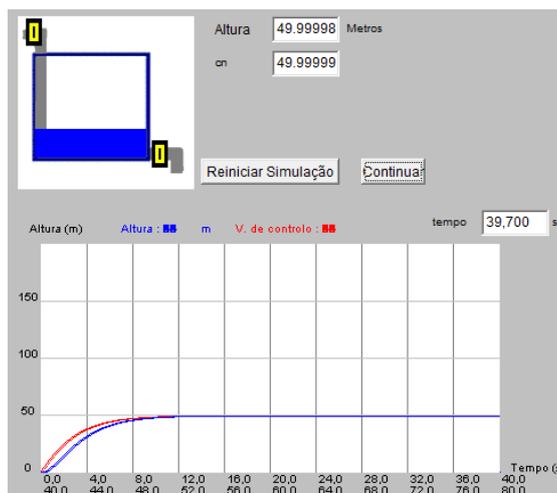


Figura 4-16 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade modificado com K_p=0.15.

Diminuindo o valor de **I** para 0.05, e aumentando o valor de **D** para 1.0×10^{-7} , mas mantendo os restantes valores relativamente à simulação anterior. Assim para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	<i>h_{in}</i> :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Steptime:	0.1 s	I :	0.05
K_p :	0.15	D :	1.0×10^{-7}

Observando a figura 4-17 pode-se ver que com estes valores para os parâmetros do controlador PID, o sistema responde mais rápido, mas estes valores também fazem com que o sistema oscile, em torno do valor pretendido para a altura do tanque.

Também se pode ver que as oscilações vão se tornando cada vez mais pequenas com o passar do tempo aproximando-se cada vez mais do valor pretendido

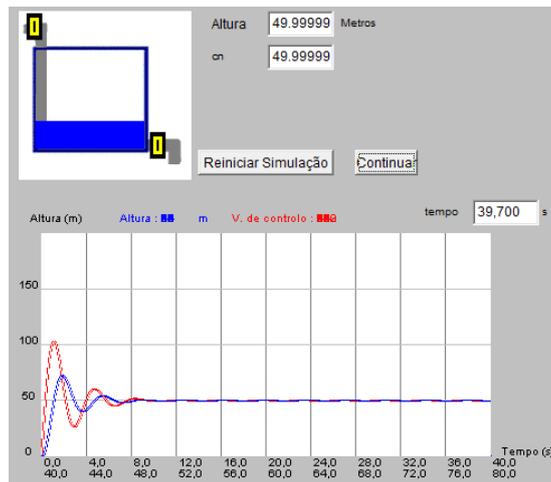


Figura 4-17 - Simulação em malha fechada com controlo PID de velocidade modificado.

c) Algoritmo de posição

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	<i>h_{in}</i> :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Step time:	0.1 s	I:	0.1
<i>K_p</i> :	0.01	D:	1.0×10 ⁻⁸
<i>C_{est}</i> (acção de controlo em regime estacionário):			0 ou 3

Pelas figuras 4-18 e 4-19 pode-se ver que a variável de saída tem um comportamento semelhante ao da variável de controlo, tendendo a estabilizar no valor da variável de referência (altura desejada). Mas pela figura 4-19 pode-se ver que com um *C_{est}* igual a 3 a variável de controlo começa com um valor superior ao obtido com *C_{est}* igual a 0.

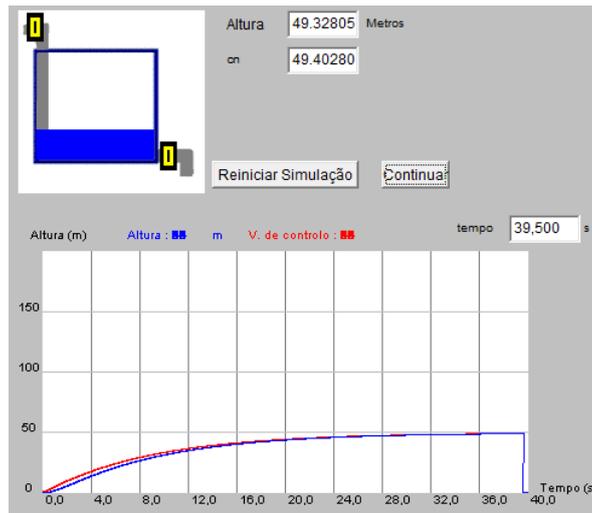


Figura 4-18 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e cest=0

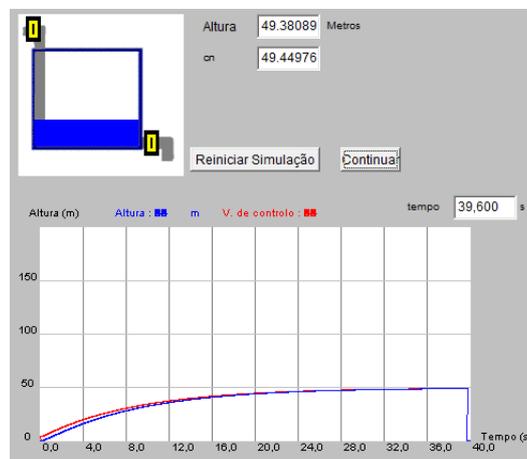


Figura 4-19 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e cest=3

Para esta simulação foram alterados, relativamente a simulação anterior, os parâmetros do controlador PID: **K_p**, **I** e **D**. Assim tem-se os seguintes valores para esta simulação.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	hin:	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Steptime:	0.1 s	I:	0.05
K _p :	0.1	D:	1.0×10 ⁻⁷
Cest (acção de controlo em regime estacionário):			0 ou 3

Olhando para as figuras 4-20 e 4-21 vê-se que com estes valores, em ambos os casos, a variável de saída oscila em torno do valor pretendido para altura, com as

oscilações a diminuir em amplitude ao longo do tempo. Também se pode ver que o tempo de subida diminui, isto deve-se principalmente a acção do K_p .

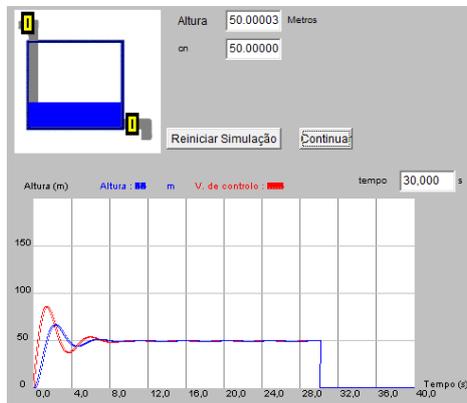


Figura 4-20 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e $cest=0$

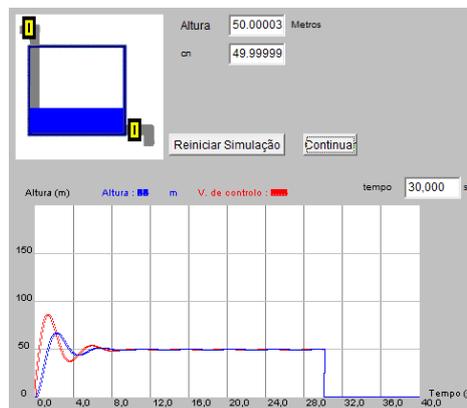


Figura 4-21 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição e $cest=3$

d) Algoritmo de posição modificado

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área do tanque:	1 m ² .	h :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	h_{in} :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Step time:	0.1 s	I:	0.1
K_p :	0.01	D:	1.0×10^{-8}
Cest (acção de controlo em regime estacionário):			0 ou 3

Observando as figuras 4-22 e 4-23 pode-se ver que os resultados da simulação são semelhantes aos obtidos para o algoritmo de posição. Novamente com o $Cest$ igual a 3 a variável de controlo não começa em zero.

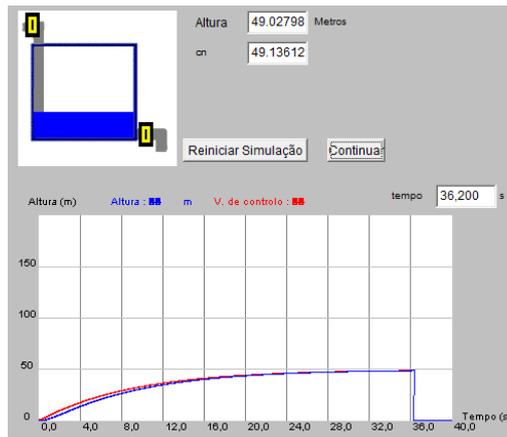


Figura 4-22 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e $\text{cest}=0$

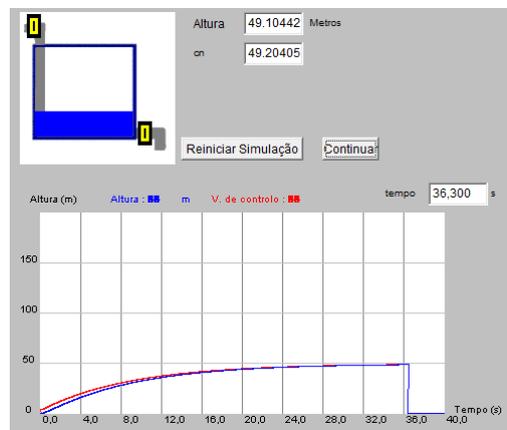


Figura 4-23 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e $\text{cest}=3$

Para esta simulação foram alterados, relativamente a simulação anterior, os parâmetros do controlador PID: **K_p**, **I** e **D**. Assim tem-se os seguintes valores para esta simulação.

Área do tanque:	1 m ² .	<i>h</i> :	0.1
Altura desejada:	50 m.	Ordem:	1
Fluxo/caudal:	50 kg/s.	<i>h_{in}</i> :	0
R saída:	1 m/(kg/s).	Método numérico:	Runge-Kutta
Steptime:	0.1 s	I:	0.05
K _p :	0.1	D:	1.0×10 ⁻⁷
Cest (acção de controlo em regime estacionário):			0 ou 3

Novamente os resultados são semelhantes aos obtidos para o algoritmo de posição. Pode-se observar pelas figuras 4-24 e 4-25 que com estes valores, em ambos os casos, a variável de saída oscila em torno do valor pretendido para altura, com as oscilações a diminuírem em amplitude ao longo do tempo. Também se pode ver que o tempo de subida diminui, isto deve-se principalmente a acção do K_p.

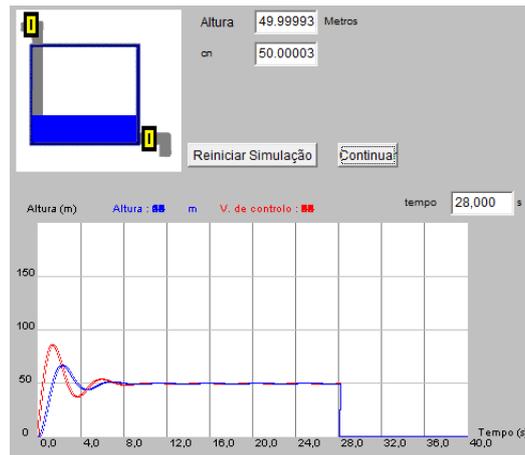


Figura 4-24 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e $c_{est}=0$

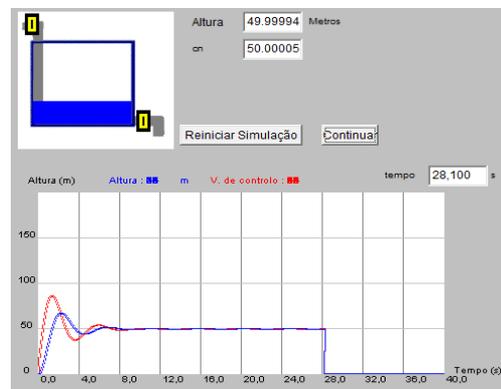


Figura 4-25 - Simulação em malha fechada com controlo PID de posição modificado e $c_{est}=3$

4.2. Resultados para um sistema de segunda ordem

O sistema escolhido para obter os resultados de um sistema de segunda ordem é o sistema hidráulico que está representado na figura 4-26.

Embora os valores escolhidos não sejam os mais prováveis de encontrar num caso real, eles foram escolhidos pois permitem ver uma evolução rápida do comportamento do sistema, no gráfico construído na simulação, permitindo testar os algoritmos desenvolvidos. É importante referir que os métodos numéricos utilizados para resolver as equações diferenciais que regem este sistema são de ordem 2.

As simulações a seguir vão incidir principalmente como as duas variáveis evoluem relativamente uma à outra e não na influência dos diversos parâmetros.

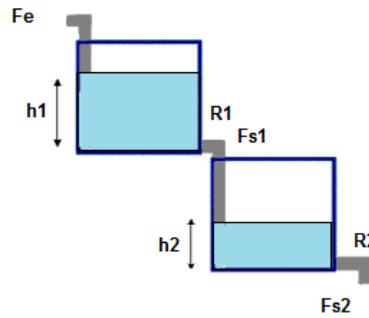


Figura 4-26 - Sistema hidráulico de segunda ordem.

4.2.1. Simulação em malha aberta

Na simulação em malha aberta o sistema evolui sem a acção de um controlador. Como é um sistema de segunda ordem existem dois valores a ser calculados. No gráfico a altura $h1$ é representada a azul, a altura $h2$ a verde e variável de controlo a vermelho.

a) Aplicando o Método de Runge-Kutta

Para efectuar a simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área tanque 1 (A1):	10 m ² .	Área tanque 2 (A2):	5 m ²
Altura desejada tanque 1 ($h1$):	50 m.	Altura desejada tanque 2 ($h2$):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h :	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	$h1in$:	0 m
$h2in$:	0 m		

Como se pode observar na figura 4-27 ambas as alturas tendem para o valor constante, mas altura $h1$ sobe mais depressa no inicio que a altura $h2$, mas ao aproximarem-se do valor do caudal de entrada as duas linhas estão muito próximas, tendendo as duas alturas a ficarem iguais.

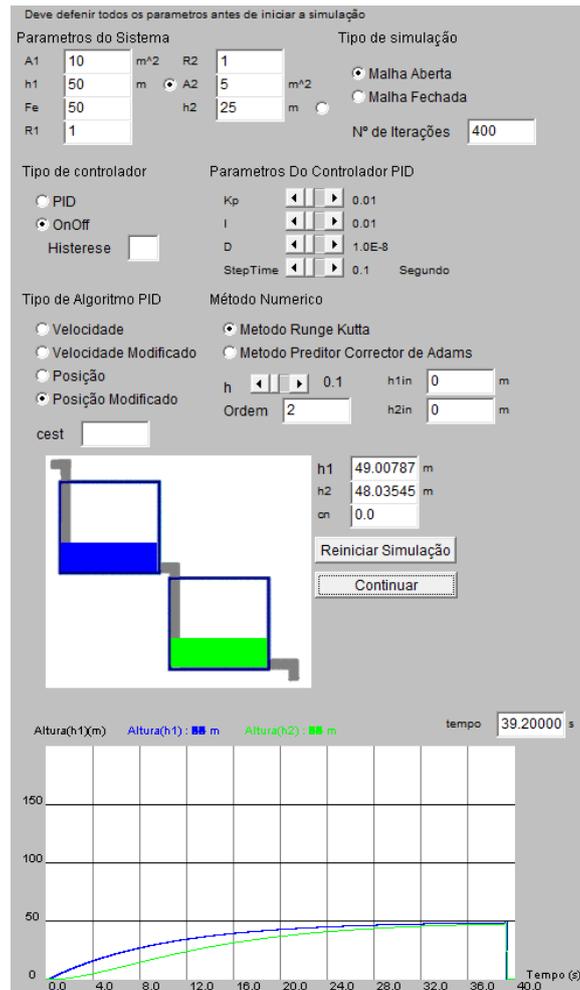


Figura 4-27 - Simulação em malha aberta sistema hidráulico de segunda ordem.

4.2.2. Simulação em malha fechada com controlador On-Off

Nesta simulação vai ser aplicado ao sistema o controlador On-Off, logo é necessário definir uma margem de histerese, que para o caso presente na figura 4-28 e 4-29 é de 10, mas o valor colocado deve ser de metade, pois esse valor é usado para definir os limites máximos e mínimo para a variável de saída.

Para efectuar esta simulação foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área tanque 1 (A1):	10 m ² .	Área tanque 2 (A2):	5 m ²
Altura desejada tanque 1 (h1):	30 m.	Altura desejada tanque 2 (h2):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h:	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	h1in:	0 m
h2in:	0 m	Histerese:	10

a) **Controlar $h1$**

Para controlar $h1$ é necessário na interface da simulação escolher esta altura através do botão que está a frente deste campo.

Observando a figura 4-28 vê-se que o valor da altura $h1$ varia entre os valores $h1+histerese/2$ e $h1-histerese/2$, como seria de esperar. Mas é de notar que o valor de $h2$ também é influenciado neste processo pois o valor deste varia em torno do valor pretendido para $h1$. Isto deve-se ao facto de entrada do tanque 2 ser a saída do tanque 1, logo se $h1$ varia $h2$ também vai variar.

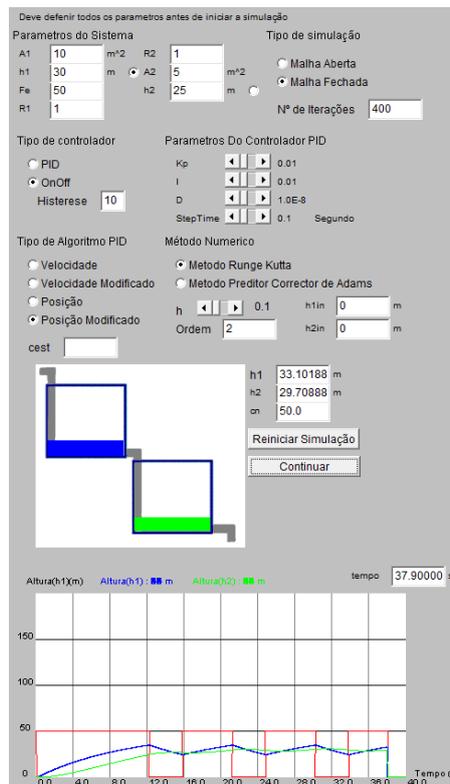


Figura 4-28 – Simulação em malha fechada com controlador On-Off de um sistema hidráulico de segunda ordem controlando $h1$.

b) **Controlar $h2$**

Para controlar $h2$ deve-se seleccionar na interface o botão que está a frente do valor $h2$.

Observando a figura 4-29 pode-se ver o valor da altura $h2$ varia entre $h2+histerese/2$ e $h2-histerese/2$, mas o valor da altura $h1$ também varia entre um valor máximo e um valor mínimo. Também se pode ver que quando a variável de controlo vai a zero, o valor de $h1$ começa logo a decrescer enquanto que o valor de $h2$ só passado

algum tempo é que começa a descer. O mesmo se passa quando o valor da variável de controlo fica com o seu valor máximo, o valor de $h1$ começa logo a subir enquanto que o de $h2$ só sobe passando algum tempo. Isto deve-se aos factos de a entrada do tanque 2 ser a saída do tanque 1 e de que a variável manipulada pelo controlador ser a entrada do tanque 1, o que faz com a alteração da variável de controlo afecte primeiro a altura $h1$ e só depois a $h2$.

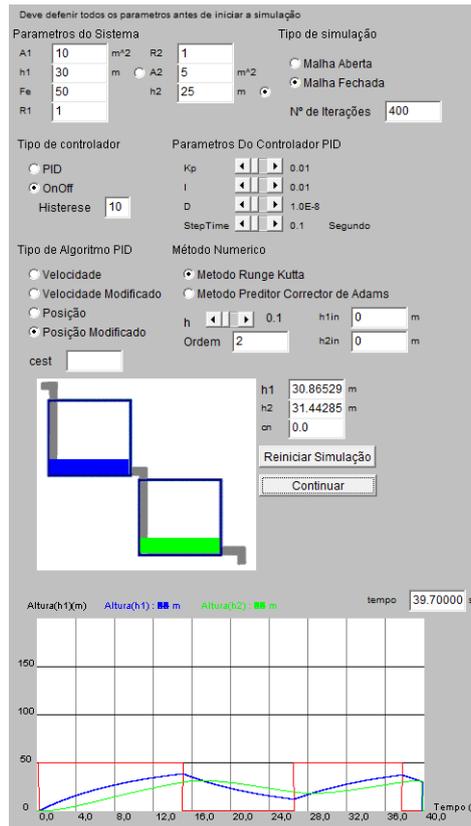


Figura 4-29 - Simulação em malha fechada com controlador On-Off de um sistema hidráulico de segunda ordem controlando $h2$.

4.2.3. Simulação em malha fechada com controlador PID

a) Controlar $h1$

Para controlar $h1$ é necessário escolher este campo na interface da simulação, da mesma maneira que foi feito para o controlador On-Off.

• **Algoritmo de velocidade.**

Foram escolhidos os parâmetros seguintes para a simulação.

Área tanque 1 (A1):	1 m ² .	Área tanque 2 (A2):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 (<i>h1</i>):	50 m.	Altura desejada tanque 2 (<i>h2</i>):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	<i>h</i> :	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	<i>h1in</i> :	0 m
<i>h2in</i> :	0 m	StepTime:	0.1
Kp:	0.05	D:	1.0×10 ⁻⁸
I:	0.5		

Pela figura 4-30 pode ver-se que tanto a altura *h1* como a altura *h2*, evoluem para o valor constante pretendido para a altura *h1*. Também se pode ver que existe um pequeno salto inicial (quase imperceptível) no valor da variável de controlo.

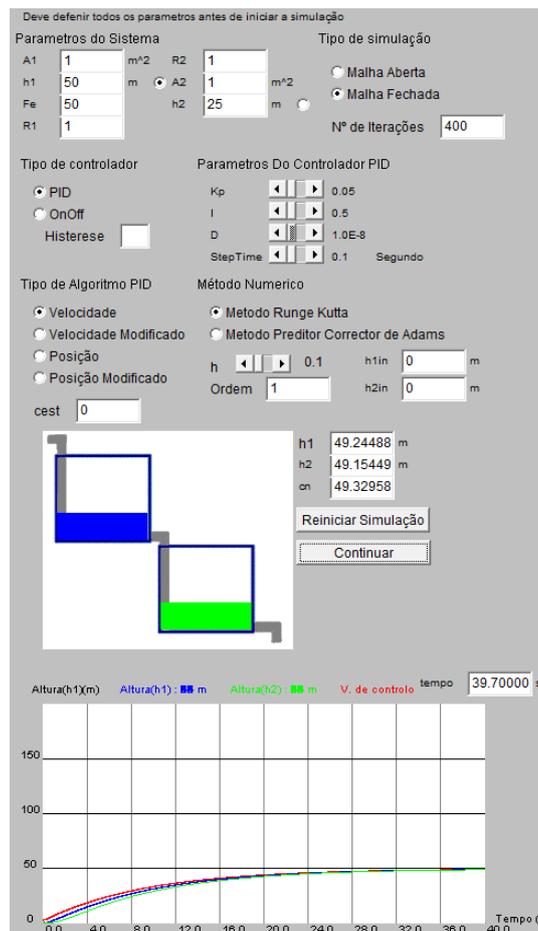


Figura 4-30 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando *h1* usando o algoritmo de velocidade.

• **Algoritmo de velocidade modificado**

Os parâmetros escolhidos são os mesmos do caso anterior logo.

Área tanque 1 (A1):	1 m ² .	Área tanque 2 (A2):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 (h1):	50 m.	Altura desejada tanque 2 (h2):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h:	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	h1in:	0 m
h2in:	0 m	StepTime:	0.1
Kp:	0.05	D:	1.0×10 ⁻⁸
I:	0.5		

Pela figura 4-31 vê-se que os resultados são semelhantes aos obtidos com algoritmo de velocidade, excepto que já não existe o salto inicial no valor da variável de controlo, pois o algoritmo de velocidade modificado corrige esse problema.

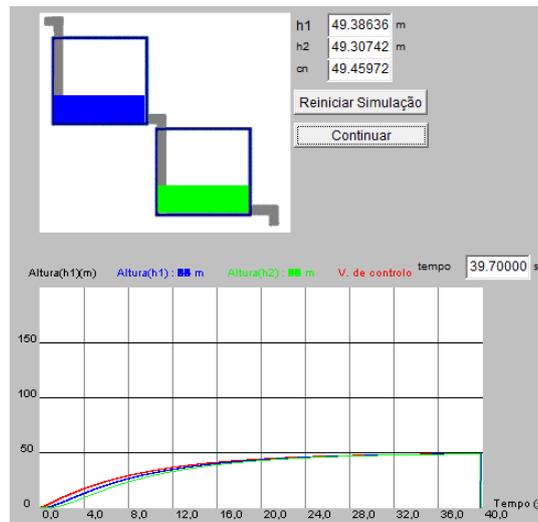


Figura 4-31 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando h1 usando o algoritmo de velocidade modificado.

• **Algoritmo de posição**

Para a simulação usando o algoritmo de posição foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área tanque 1 (A1):	1 m ² .	Área tanque 2 (A2):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 (h1):	50 m.	Altura desejada tanque 2 (h2):	25 m

Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h :	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	h_{1in} :	0 m
h_{2in} :	0 m	StepTime:	0.1
K_p :	0.05	D:	1.0×10^{-8}
I:	0.5	cest:	5

Pela figura 4-32 vê-se que o comportamento do sistema é muito semelhante ao obtido com os algoritmos de velocidade. Também se pode ver que o valor da variável de controlo começa com um valor maior que o seu valor inicial quando utilizando o algoritmo de velocidade, devido ao Cest.

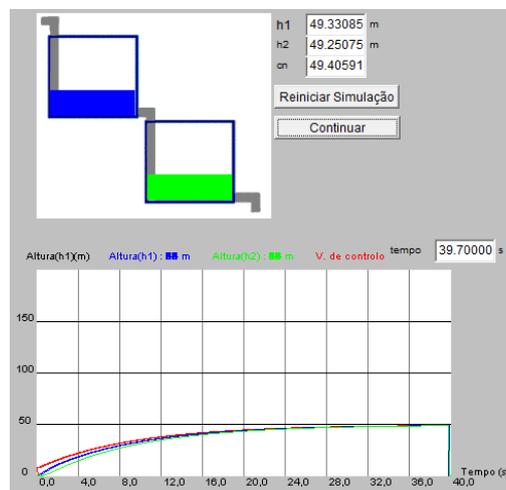


Figura 4-32 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h1$ usando o algoritmo de posição.

- **Algoritmo de posição modificado**

Para a simulação usando o algoritmo de posição modificado foram escolhidos os seguintes parâmetros.

Área tanque 1 (A1):	1 m ² .	Área tanque 2 (A2):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 ($h1$):	50 m.	Altura desejada tanque 2 ($h2$):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h :	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	h_{1in} :	0 m
h_{2in} :	0 m	StepTime:	0.1
K_p :	0.05	D:	1.0×10^{-8}
I:	0.5	cest:	5

Observando a figura 4-33, vê-se que os resultados obtidos são semelhantes aos obtidos com a utilização do algoritmo de posição.

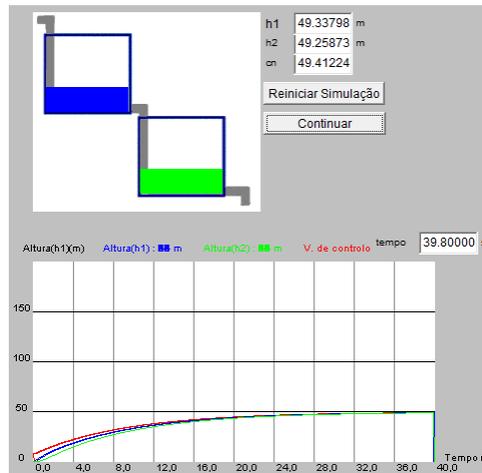


Figura 4-33 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando $h1$ usando o algoritmo de posição modificado.

b) Controlar $h2$

Para controlar $h2$ é necessário escolher este campo na interface da simulação, da mesma maneira como foi feito para os casos anteriores.

- **Algoritmo de velocidade**

Para a simulação com o algoritmo de velocidade foram escolhidos os parâmetros listados em baixo.

Área tanque 1 ($A1$):	1 m ² .	Área tanque 2 ($A2$):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 ($h1$):	50 m.	Altura desejada tanque 2 ($h2$):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h :	0.1
Resistência de saída tanque 1 ($R1$):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 ($R2$):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	$h1in$:	0 m
$h2in$:	0 m	StepTime:	0.1
Kp :	0.05	D:	1.0×10^{-8}
I:	0.5		

Observando a figura 4-34 vê-se que tanto a altura $h1$ como a altura $h2$, que é a que está a ser controlada, tendem a estabilizar ao chegar ao valor da altura desejada para o tanque 2.

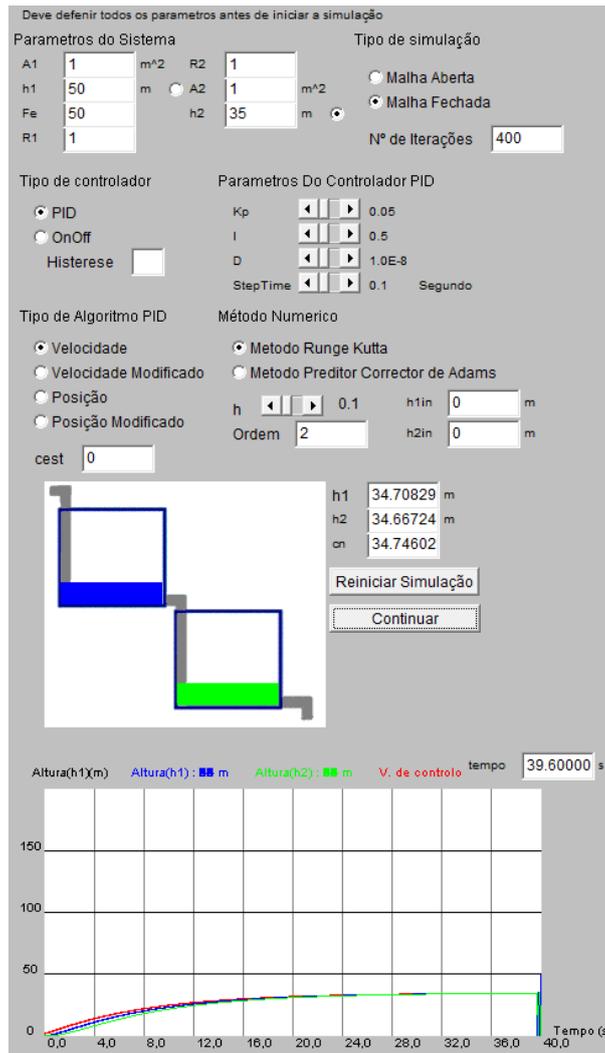


Figura 4-34 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando h_2 usando o algoritmo de velocidade.

- **Algoritmo de velocidade modificado**

Os valores utilizados para esta simulação são os mesmos utilizados na simulação anterior.

Área tanque 1 (A1):	1 m ² .	Área tanque 2 (A2):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 (h_1):	50 m.	Altura desejada tanque 2 (h_2):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h :	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	h_{1in} :	0 m
h_{2in} :	0 m	StepTime:	0.1
Kp:	0.05	D:	1.0×10 ⁻⁸
I:	0.5		

Pela figura 4-35 vê-se que os resultados desta simulação são semelhantes aos obtidos para o algoritmo de velocidade, excepto para o valor inicial da variável de controlo que para este caso é mais pequeno.

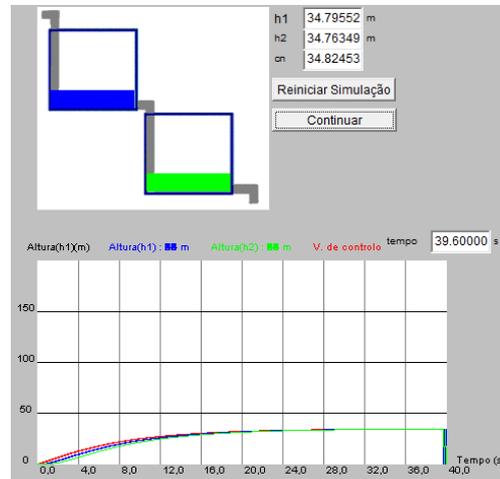


Figura 4-35 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando h_2 usando o algoritmo de velocidade modificado.

- **Algoritmo de posição**

Os valores utilizados para esta simulação são os seguintes.

Área tanque 1 (A_1):	1 m ² .	Área tanque 2 (A_2):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 (h_1):	50 m.	Altura desejada tanque 2 (h_2):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h :	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R_1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R_2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	h_{1in} :	0 m
h_{2in} :	0 m	StepTime:	0.1
K_p :	0.05	D :	1.0×10^{-8}
I :	0.5	cest:	5

Pela figura 4-36 pode-se ver que o comportamento do sistema é muito semelhante ao obtido com os algoritmos de velocidade. Também se pode ver que o valor da variável de controlo começa com um valor maior que o seu valor inicial quando utilizando o algoritmo de velocidade, devido ao Cest.

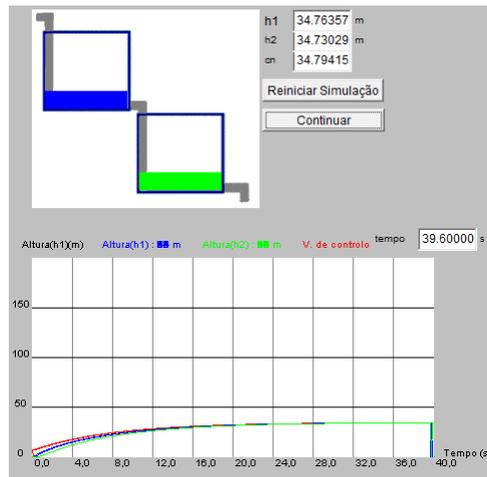


Figura 4-36 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando h_2 usando o algoritmo de posição.

- **Algoritmo de posição modificado**

Os valores utilizados nesta simulação são os mesmos usados na simulação para o algoritmo de posição.

Área tanque 1 (A_1):	1 m ² .	Área tanque 2 (A_2):	1 m ²
Altura desejada tanque 1 (h_1):	50 m.	Altura desejada tanque 2 (h_2):	25 m
Caudal de entrada (Fe):	50 kg/s	h :	0.1
Resistência de saída tanque 1 (R_1):	1 m/(kg/s)	Resistência de saída tanque 2 (R_2):	1 m/(kg/s)
Ordem:	2	h_{1in} :	0 m
h_{2in} :	0 m	StepTime:	0.1
K_p :	0.05	D :	1.0×10^{-8}
I :	0.5	cest:	5

Através da figura 4-37 pode-se ver os resultados para este algoritmo são muito semelhantes aos obtidos com o algoritmo de posição.

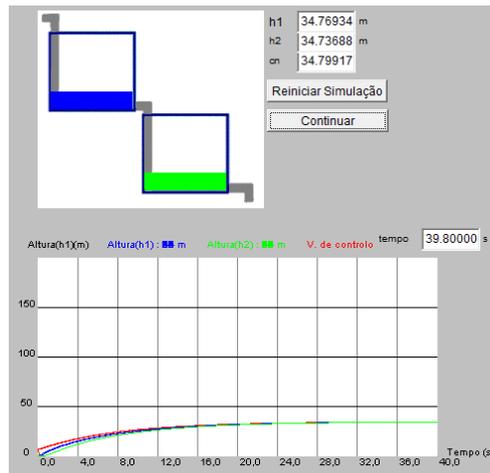


Figura 4-37 - Simulação em malha fechada com controlador PID controlando h_2 usando o algoritmo de posição modificado.

Embora os resultados deste capítulo possam não se aplicar a todos os sistemas, eles serviram principalmente para demonstrar as funcionalidades presentes no laboratório virtual, e que se aplicam a todos os sistemas. Embora as equações diferenciais que regem o funcionamento de cada sistema sejam diferentes, os princípios de funcionamento dos métodos numéricos e dos tipos de controlador, são os mesmos para todas as simulações, cabendo ao aluno, definir os parâmetros, escolher o método numérico e algoritmo de controle correctos conforme o sistema a simular.

CAPÍTULO 5 Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros

5.1. Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido um laboratório virtual, o “SimLab”, para simular problemas de controlo e métodos numéricos. O “SimLab” é constituído por um conjunto de aplicações em java que permitem simular diversas situações para os diferentes problemas de controlo. É possível efectuar a simulação em malha aberta ou malha fechada, escolher qual o método numérico e o algoritmo de controlo a utilizar, bem como variar os diversos parâmetros que constituem cada sistema. Como este laboratório virtual, “SimLab” foi desenvolvido com o intuito de ser uma ferramenta a utilizar pelos alunos no seu processo de ensino/aprendizagem como complemento às aulas de Controlo e Métodos Numéricos. Assim a escolha dos métodos numéricos a implementar, e dos algoritmos de controlo a utilizar levou em conta os conteúdos leccionados nestas áreas. Nas aplicações foram implementados os métodos de Runge-Kutta e preditor-corrector de Adams, para resolução das equações diferenciais que descrevem os sistemas a implementar, e os controladores On-Off e PID para efectuar o controlo dos diversos sistemas. Nas simulações foram implementados sistemas eléctricos, mecânicos, térmicos e hidráulicos.

Também foi apresentada toda a fundamentação teórica necessária para a realização deste trabalho. Este capítulo (capítulo 2) é importante pois permitiu perceber quais os métodos numéricos existentes e o seu funcionamento, bem como quais os algoritmos de controlo que deveriam ser utilizados. Assim os métodos numéricos escolhidos foram o de Runge-Kutta e o preditor-corrector de Adams, tanto para equações diferenciais de primeira ordem como para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, pois são os métodos estudados na unidade curricular de métodos numéricos. Os tipos de controlo utilizados foram o On-Off e as quatro variações do controlo PID, que são: velocidade, velocidade modificado, posição e posição modificado, pois são aqueles que são leccionados nas disciplinas de controlo.

A modelização dos sistemas a implementar foi necessária, pois permitiu obter as equações diferenciais, ou sistemas de equações, que descrevem cada sistema. Foram também apresentados os algoritmos utilizados para o funcionamento dos métodos

numéricos, e dos controladores On-Off e PID, que foram desenvolvidos com base no que está presente na fundamentação teórica (ver capítulo 2).

Também foram apresentados os resultados obtidos para as simulações de dois sistemas, um sistema hidráulico de primeira ordem e um sistema hidráulico de segunda ordem. As simulações efectuadas tiveram como objectivo testar e validar os algoritmos desenvolvidos.

Com as simulações efectuadas em malha aberta pôde-se ver que em ambos os sistemas a variável de saída (altura de água dos tanques) tende a estabilizar em um valor constante. O que leva a concluir que estes sistemas, em malha aberta, não evoluem indefinidamente tendendo a estabilizar num valor constante, logo são sistemas estáveis.

Através da simulação em malha aberta do sistema de primeira ordem pôde-se concluir que a alteração do método numérico e da ordem do método, não causaram alterações significativas ao funcionamento dos sistemas. Portanto para este caso o que pode levar a escolher um método relativamente a outro ou uma ordem do método relativamente a outra, é a complexidade e o número de cálculos que o método tem de executar e o esforço computacional necessário para resolver a equação diferencial.

Pela simulação em malha aberta do sistema de primeira ordem observou-se que um h (distância entre os instantes de tempo) maior, faz com que sejam necessários menos cálculos para o sistema atingir o valor onde estabiliza. Isto faz com que os cálculos dos valores da variável de saída sejam menos precisos, mas também é necessário menos esforço computacional para obter os valores desejados.

No que toca às simulações em malha fechada com controlador On-Off, observa-se que tanto para o sistema de primeira ordem como para o sistema de segunda ordem o valor da variável de saída varia entre os limites superior e inferior definidos para essa variável, como seria de esperar. No caso do sistema de segunda ordem é ainda importante referir que quando se está a controlar a variável $h1$ (altura de água tanque 1), a variável $h2$ (altura de água tanque 2) varia em torno do valor pretendido para $h1$. O mesmo acontece quando se controla $h2$, o valor de $h1$ também varia em torno do valor pretendido para $h2$ mas com oscilações maiores. Também se verificou que quando se controla $h2$, esta variável não responde instantaneamente às alterações da variável de controlo, levando algum tempo para que isto aconteça. Isto deve-se ao facto de a variável de controlo actuar sobre a entrada do sistema (caudal de entrada), que é a entrada para o tanque 1, fazendo com que as alterações na variável de controlo se

reflectam primeiro na variável $h1$, e só passado algum tempo na variável $h2$, visto a saída do tanque 1 é que é a entrada do tanque 2.

Observando as simulações em malha fechada com controlador PID, tanto para o sistema de primeira ordem como para o sistema de segunda ordem, pode concluir-se que o comportamento do sistema é muito semelhante para todos os algoritmos, quando sujeitos às mesmas condições. Isto leva a concluir que o que pode levar à escolha de um algoritmo de controlo em vez de outro pode ser a o esforço computacional que um sistema de controlo real pode suportar.

Também se pôde observar que com um valor de I superior ao de Kp , os valores das variáveis de saída dos sistemas tendiam a estabilizar ao se aproximarem do valor desejado para a variável de saída que estava a ser controlada.

Na simulação com controlador PID para o sistema de primeira ordem também se pôde ver que quando o *steptime* (período de amostragem) é diferente de h , o gráfico da variável de controlo apresenta um aspecto em “escada”. Isto deve-se ao facto de o valor da variável de controlo só ser alterado para instantes de tempo múltiplos do período de amostragem.

Também se pode concluir que o algoritmo de velocidade modificado produz melhores resultados que o algoritmo de velocidade, pois corrige o salto inicial no valor da variável de controlo que ocorre com o algoritmo de velocidade.

Nas simulações em malha fechada com os algoritmos de posição e posição modificado, pode-se ver que o *Cest* faz com que a variável de controlo apresente um valor inicial diferente de zero.

Nas simulações com controlo PID para o sistema de primeira ordem observou-se que aumentando apenas o valor de Kp , o tempo de subida do sistema diminui. Mas quando se aumentava os parâmetros Kp e D e se diminui o parâmetro I , o sistema começava a oscilar, com as oscilações a diminuírem de amplitude ao longo do tempo. Também se pôde ver, que para estes casos, a amplitude das oscilações é superior para os algoritmos de velocidade e de velocidade modificado. Isto leva a concluir que a escolha dos parâmetros do controlador PID, deve ser feita com cuidado para se obter os resultados pretendidos.

Nas simulações em malha fechada com controlador PID para o sistema de segunda ordem, pode-se ver que para todos os casos a variável de saída que não era controlada, tinha o comportamento semelhante ao da variável de saída que estava a ser controlada.

Os resultados obtidos nas simulações efectuadas podem não se aplicar a todos os sistemas, mas serviram para demonstrar as funcionalidades presentes no laboratório virtual, e que se aplicam a todos os sistemas. Embora as equações diferenciais que regem o funcionamento de cada sistema sejam diferentes, os princípios de funcionamento dos métodos numéricos e dos tipos de controlador, são os mesmos para todas as simulações, cabendo ao aluno, definir os parâmetros, escolher o método numérico e algoritmo de controlo correctos conforme o sistema a simular.

5.2. Sugestões para trabalho futuro

Embora o laboratório virtual desenvolvido cumpra os requisitos pretendidos, os algoritmos implementados necessitavam de testes mais intensivos para comprovar o seu funcionamento quando submetidos as mais diversas situações. Seria também interessante adicionar ao laboratório mais algumas funcionalidades, tais como, novos métodos numéricos bem como outros tipos de controlador.

Uma das funcionalidades a implementar, seria a possibilidade de guardar num ficheiro todos os resultados de uma simulação para posterior consulta pelo aluno.

Também seria interessante estender o “SimLab” a outras unidades curriculares, permitindo ao aluno compreender melhor as matérias leccionadas nessas unidades curriculares, e ainda fazer uma ligação entre diversas áreas.

Outra funcionalidade que poderia ser implementada seria aplicar à página Web que serve de suporte ao laboratório virtual, um sistema em que os alunos possam trocar os resultados das simulações entre si e com o professor e também permitisse tirar dúvidas sobre as simulações efectuadas.

REFERÊNCIAS

Referencias Bibliográficas

- [1] Soares, F.O.; Leão, C.P.; Moreira, A.; Mota, A.; Arantes, F.; Dias, F., "Funcionalidades web como complemento ao ensino presencial", in Proc. Conferência eLES'04: eLearning no Ensino Superior, Aveiro, Portugal (2004), 10 páginas.
- [2] Leão, C.P.; Soares, F.O., "Internet based complementary learning and assessment", 4th International Conference on Multimedia and Information and Communication Technologies in Education-Current Developments in Technology-Assisted Education, Mendez-Vilas, A. et al. (eds.), 504-508, November 2006, Seville, Spain. ISBN: 84-690-2469-8.
- [3] Leão, C.P.; Silva, P.M.; Oliveira, P.C.; Carvalho, N.C.; Soares, F.O., "Learning automation by doing it – a case study", International Conference on Engineering Education – ICEE07, 6 pp., Coimbra, Portugal, 2007.
- [4] Soares, F.O.; Leão, C.P., "Kits didáticos no ensino de Automação e Controlo – caso de estudo", Engenharias'07 – Inovação & Desenvolvimento, 5 pp. (artigo 88), Covilhã, Portugal, 2007.
- [5] Fernandes, E. M. G. P., Computação Numérica, 2ª edição, Universidade do Minho, 1997.
- [6] Soares, F. O., Apontamentos da cadeira de Controlo de Processos, Universidade do Minho.
- [7] Oppenheim, Alan V.; Willsky, Alan S., Signals & Systems, 2ª edição, Prentice-Hall, 1997.
- [8] Leslie Balmer , *Signals and Systems – An introduction*, PRENTICE HALL 1991.
- [9] Garrido, P., Apontamentos da cadeira de Controlo Automático I, Universidade do Minho, 2004.
- [10] Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering, 4ª edição, Prentice-Hall, 2002.
- [11] Babatunde A. Ogunnaike e W. Harmon Ray, *Process Dynamics, Modelling and Control*, OXFORD UNIVERITY PRESS, 1994

[12] D’Azzo, John J.; Houpis, Constantine H., *Linear Control System Analysis and Design Conventional and Modern*, McGraw-Hill 1998

[13] Meireles, Vítor Cancela, *Circuitos Eléctricos*, 4ª edição revista, Lidel, 2007

[14] *Apontamentos de Física I*, Universidade do Minho, Guimarães, 2003

[15] Carvalho, Nuno; Esteves, Marco; Silveira, Rodrigo; Silva, Pedro; *Modelização de um Sistema Hidráulico de 3ª ordem*, Relatório Interno, Universidade do Minho, 2007

[16] Cunha, Hélder, *Estudo do controlo activo da suspensão automóvel*, Relatório Interno, Universidade do Minho, 2007

[17] Ramos, Nuno Filipe da Silva, *Sistema de controlo de um Pêndulo Invertido*, Relatório Interno, Universidade do Minho.

Referencias www

[18] Wikipédia, Declaração de Bolonha. Data de actualização: 21/10/2008, Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em

http://pt.wikipedia.org/wiki/Declara%C3%A7%C3%A3o_de_Bolonha

[19] Williamson Labs. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.williamson-labs.com/>

[20] Virtual Control Lab 3.1. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/VCLab/>

[21] Howard Hughes Medical Institute, Biointeractive Virtual Lab. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em

<http://www.hhmi.org/biointeractive/vlabs/index.html>

[22] Universidade Federal de Santa Catarina, Laboratório Virtual de Física. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em

<http://www.fsc.ufsc.br/~ccf/parcerias/ntnujava/index-port.html#topo>

[23] Sala de Física 3. Data do último acesso: 12/11/2008, Disponível em <http://br.geocities.com/saladefisica3/laboratorio.htm>

[24] Laboratório Virtual On-line de Electrotecnia e Telecomunicações. Data de actualização: 26/9/2007. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.labvirtual.pt.vu/>

[25] Laboratório Virtual. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em http://wwwp.feb.unesp.br/jcandido/lav/lab_vitual/index.htm

- [26] NTNU Virtual Physics Laboratory. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/index.html#>
- [27] Santos, Wendel, Wendel Santos Física para vestibulares, Laboratório virtual. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em http://www.wendelsantos.com/novo/principal.php?pag=laboratorio_simulacoes
- [28] University of Newcastle, Virtual Laboratory for Control System Design. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://csd.newcastle.edu.au/>
- [29] e-LEE, e-Learning Tools for Electrical Engineering. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.lei.ucl.ac.be/multimedia/eLEE/PO/index.htm>
- [30] Mota, André R. P. S. , Moreira, André Domingos Freitas, O Mundo de Controlo de Processos. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://controlo-processos.dei.uminho.pt/>
- [31] Silva, João Manuel Gomes, Controle em Malha Fechada. Data de actualização: 3/4/2000. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/node6.html>
- [32] Silva, João Manuel Gomes, Acção Liga-Desliga (On-Off). Data de actualização: 3/4/2000. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/node20.html>
- [33] Silva, João Manuel Gomes, O Controlador PID. Data de actualização: 3/4/2000. Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/node24.html>
- [34] Java Technogy. Data do último acesso: 20/11/2008. Disponível em <http://www.sun.com/java/>
- [35] Wikipédia, Java (linguagem de programação). Data de actualização: 14/11/2008, Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em [http://pt.wikipedia.org/wiki/Java_\(linguagem_de_programa%C3%A7%C3%A3o\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/Java_(linguagem_de_programa%C3%A7%C3%A3o))
- [36] Wikipédia, Applet. Data de actualização: 21/10/2008, Data do último acesso: 19/11/2008. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Applet>

Anexo A. SimLab



Figura A. 1. SimLab: página principal.



Figura A. 2. SimLab: Métodos Numéricos: página principal.

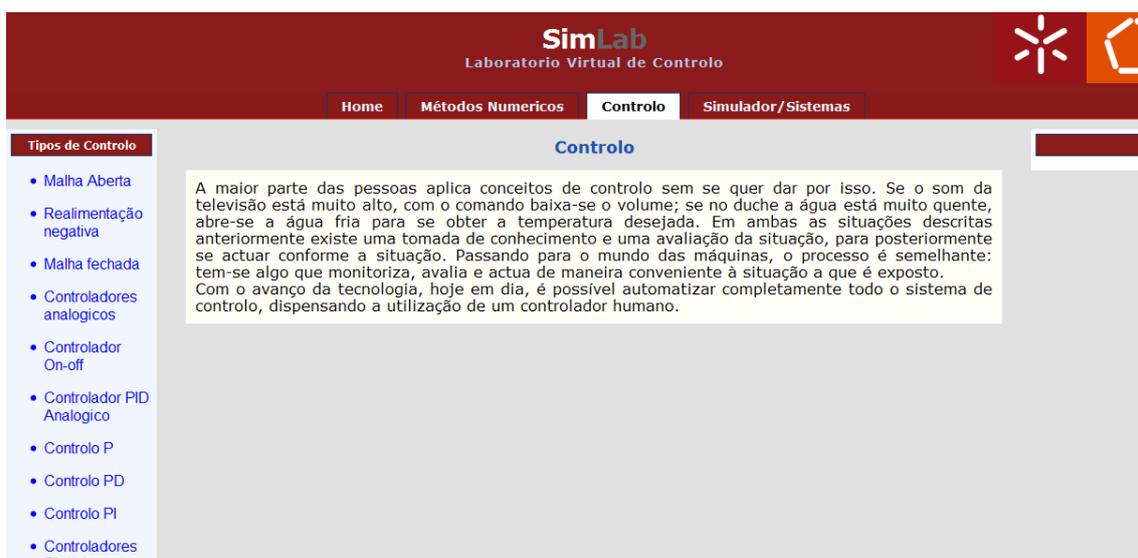


Figura A. 3. SimLab: Controlo: página principal.

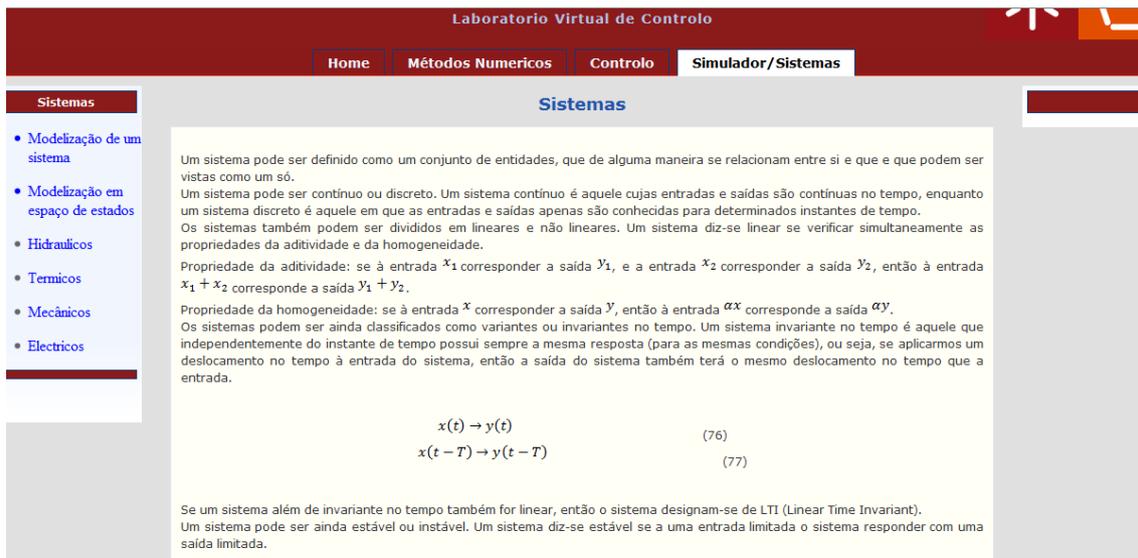


Figura A. 4. SimLab: Simulador /Sistemas: página principal.

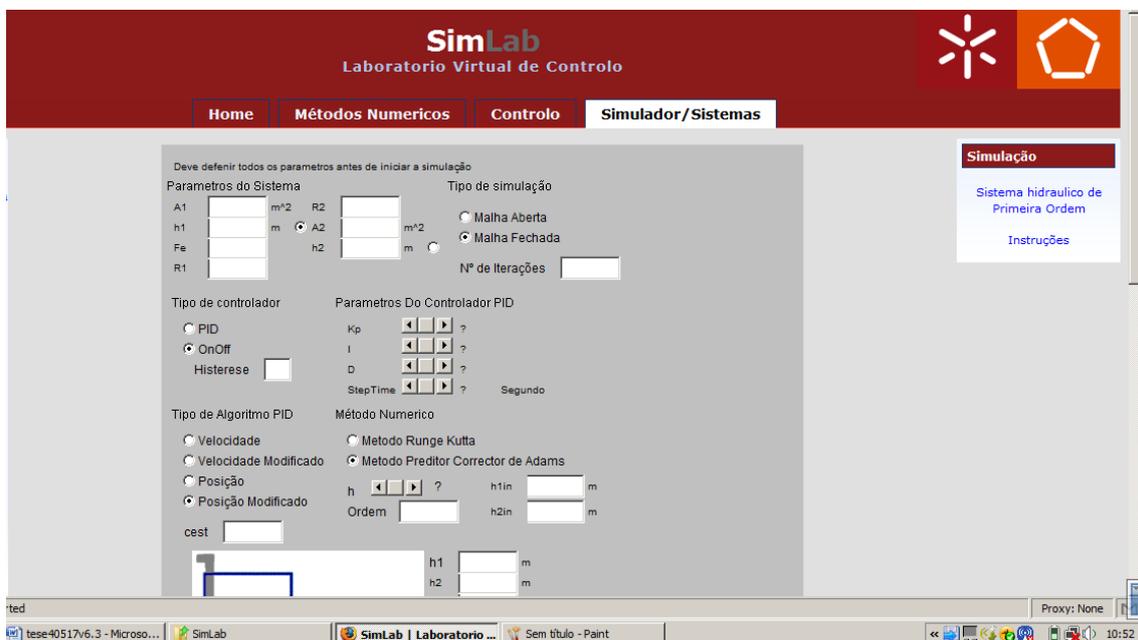


Figura A. 5. SimLab: Simulador/Sistemas: simulação sistemas hidráulicos: página principal.

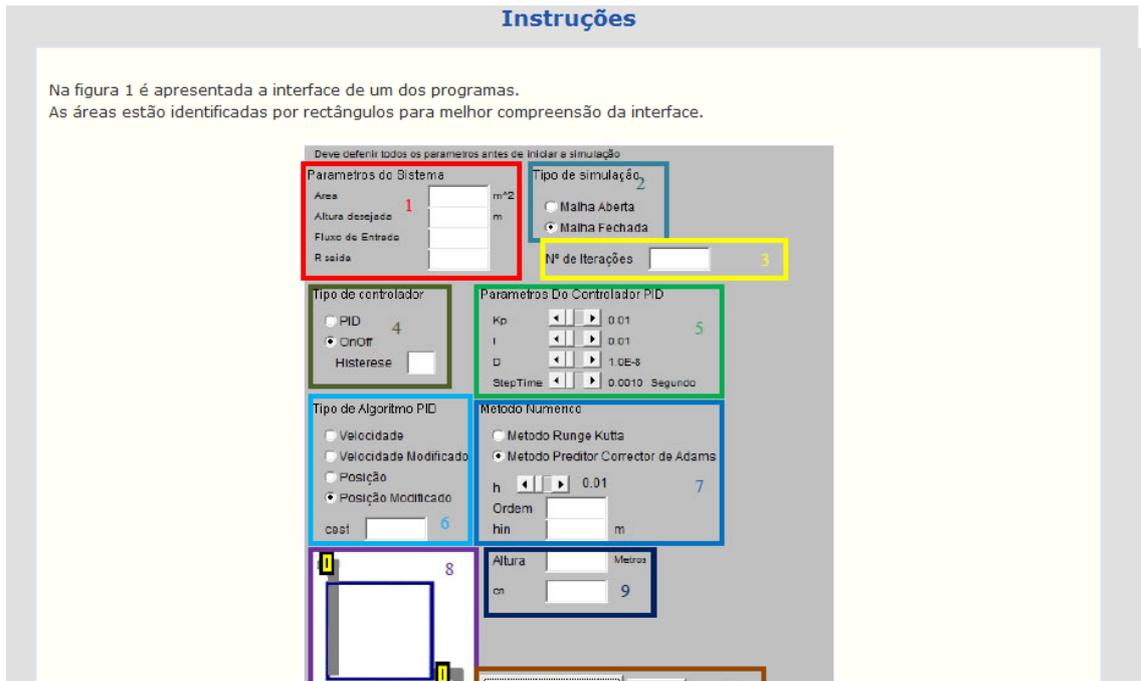


Figura A. 6. SimLab: Simulador/Sistemas: simulação sistemas hidráulicos: instruções.